

### Rozwiązanie zadania T1.

Przypadek a)

Z uwagi na dużą masę klocka możemy przyjąć, że pozostaje on nieruchomy, natomiast ciało najpierw zsuwa się z wysokości  $h/2$  po pochyłej części klocka, a następnie spada swobodnie z wysokości  $h/2$  z prędkością początkową skierowaną pod kątem  $45^\circ$  do pionu.

Z zasady zachowania energii wnioskujemy, że w momencie oderwania od klocka wartość prędkości ciała jest równa

$$v_1 = \sqrt{gh}. \quad (1)$$

Pozioma składowa prędkości to  $v_{\text{poz}} = v_1/\sqrt{2}$ , a pionowa składowa to  $v_{\text{pion}} = v_1/\sqrt{2}$ . Oznaczając przez  $t$  czas swobodnego spadku ciała, mamy

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}gt^2 + v_{\text{pion}}t, \quad (2)$$

$$d = v_{\text{poz}} \cdot t. \quad (3)$$

Rozwiązując równanie kwadratowe na  $t$  i wybierając dodatni pierwiastek, otrzymujemy

$$t = \frac{-v_{\text{pion}} + \sqrt{(v_{\text{pion}})^2 + gh}}{g}. \quad (4)$$

Zatem w przypadku a)

$$d = \frac{-\sqrt{gh/2} + \sqrt{gh/2 + gh}}{g} \cdot \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}h. \quad (5)$$

Przypadek b)

W tym przypadku ze względu na swą znikomą masę klocek nie wpływa na ruch ciała, więc porusza się ono w kierunku pionowym z przyspieszeniem  $g$ . Z zasady zachowania energii stwierdzamy, że w chwili oderwania ciało ma skierowaną pionowo prędkość  $v_{\text{pion}} = v_1 = \sqrt{gh}$ . Więzy powodują, że w tym momencie klocek ma prędkość  $v_{\text{poz}} = v_1$  skierowaną poziomo. W przypadku b) również obowiązują wzory (2), (3) i (4), ale z innymi wartościami  $v_{\text{pion}}$  oraz  $v_{\text{poz}}$ . Uwzględniając ten fakt, otrzymujemy

$$d = \frac{-\sqrt{gh} + \sqrt{gh + gh}}{g} \sqrt{gh} = (\sqrt{2} - 1)h. \quad (6)$$

Szukana odległość jest większa w przypadku b).

### Punktacja zadania T1

Jakościowy opis zachowania układu w przypadku a) – 1 pkt.

Prędkość ciała w chwili oderwania w przypadku a) (obie składowe) – 1 pkt.

Wzory pozwalające na wyznaczenie szukanej odległości (wzory (2), (3) i (4) lub równoważne) – 3 pkt.

Odległość w przypadku a) (wzór (5)) – 1 pkt.

Jakościowy opis zachowania układu w przypadku b) – 1 pkt.

Prędkość ciała w chwili oderwania w przypadku b), w tym zauważenie, że jest ona pionowa – 1 pkt.

Odległość w przypadku b) (wzór (6)) – 1 pkt.

Wniosek, że szukana odległość w przypadku b) jest większa niż w przypadku a) – 1 pkt.

## Rozwiązanie zadania T2

W stanie początkowym spełniony jest warunek równowagi mechanicznej oraz równanie stanu gazu doskonałego

$$p_0 = Mg/S, \quad (7)$$

$$p_0 V_0 = NRT_0, \quad (8)$$

gdzie  $p_0$  jest ciśnieniem w cylindrze,  $N$  – liczbą moli gazu w cylindrze, a  $R$  – uniwersalną stałą gazową.

Po postawieniu na tłoku ciężarka o masie  $m$  tłok zacznie się obniżać ze wzrastającą prędkością. Objętość gazu będzie malała, a ciśnienie będzie wzrastać. Nawet gdy ciśnienie w cylindrze osiągnie  $(M + m)g/S$ , ze względu na bezwładność tłok nadal będzie się obniżał. Po osiągnięciu pewnej minimalnej wysokości tłok zacznie się podnosić, a następnie znowu opuszczać. Będą występowały drgania tłoka (podnoszenie i opuszczanie). Ten proces nie jest procesem odwracalnym – podczas sprężania gazu siła działająca na tłok jest nieco większa niż podczas rozprężania. W efekcie, mimo izolacji termicznej od otoczenia, energia wewnętrzna gazu będzie wzrastać kosztem energii drgań tłoka. Po odpowiednio długim czasie drgania tłoka ustaną.

W stanie końcowym mamy równowagę mechaniczną

$$p_k = (M + m)g/S, \quad (9)$$

oraz spełnione jest równanie stanu gazu doskonałego

$$p_k V_k = NRT_k, \quad (10)$$

gdzie  $p_k, V_k$  oraz  $T_k$  są odpowiednio ciśnieniem, objętością i temperaturą gazu w stanie końcowym.

Z zasady zachowania energii zmniejszenie energii potencjalnej cylindra i masy jest równe wzrostowi energii wewnętrznej gazu, czyli

$$\frac{3}{2}NR(T_k - T_0) = (M + m)gd, \quad (11)$$

gdzie  $d$  jest wysokością, o jaką obniżył się tłok, równą

$$d = \frac{V_0 - V_k}{S}. \quad (12)$$

Po przekształceniach dostajemy

$$T_k = \left(1 + \frac{2}{5} \frac{m}{M}\right) T_0. \quad (13)$$

## Punktacja zadania T2

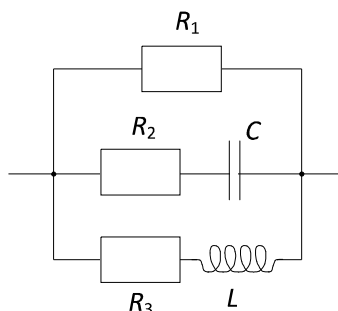
Warunek równowagi mechanicznej w stanie końcowym (wzór (9)) – 2 pkt.

Zasada zachowania energii (wzór (11) lub równoważny) – 3 pkt.

Wykorzystanie równania stanu gazu doskonałego – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (13)) – 3 pkt.

## Rozwiązanie zadania T3



Rys. 1. Schemat układu realizującego warunki zadania.

Jednym z możliwych rozwiązań jest schemat zamieszczony na Rys.1. Wykorzystuje on fakty, że cewka przeciwstawia się zmianom płynącego przez nią prądu, natomiast przez naładowany kondensator prąd nie płynie.

Obecność cewki w dolnej gałęzi powoduje, że w chwili początkowej prąd płynie tylko przez górną i środkową gałąź, zatem  $R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 5 \Omega$  (kondensator początkowo nie jest naładowany, więc w tym momencie nie przeciwstawia się on płynięciu prądu). Przy odpowiednim doborze parametrów  $C$  i  $L$  (zob. niżej) po czasie 1 ms prąd w środkowej gałęzi zaniknie (kondensator będzie naładowany), zanim zaczną płynąć znaczący prąd w gałęzi dolnej, stąd  $R_1 = 10 \Omega$ , a z oporu zastępczego podanego wyżej mamy  $R_2 = 10 \Omega$ . Wreszcie po długim czasie prąd będzie płynął zarówno w górnej, jak i w dolnej gałęzi. Ponieważ prąd płynący w górnej gałęzi ma natężenie 0,5 A, w dolnej będzie płynął prąd o natężeniu 1,5 A, czyli  $R_3 = 3,33 \Omega$ .

Czas charakterystyczny dla zmian prądu w obwodzie  $RC$  jest rzędu iloczynu  $R \cdot C$ , a w obwodzie  $RL$  – rzędu ilorazu  $L/R$ . Dlatego wartość  $R_2 C$  powinna być większa od  $1 \mu s$  i mniejsza od  $1 ms$  – np.  $0,2 ms$  ( $C \approx 20 \mu F$ ), natomiast wartość  $L/R_3$  powinna być większa od  $1 ms$  i mniejsza od  $1 s$ , np.  $0,2 s$  ( $L \approx 0,7 H$ ).

### Punktacja zadania T3

Wykorzystanie kondensatora jako elementu niemającego wpływu na początkowy przepływ prądu, ale blokującego ten przepływ po naładowaniu – 2 pkt.

Wykorzystanie cewki jako elementu blokującego początkowo przepływ prądu, ale pozwalającego na ten przepływ po dłuższym czasie – 2 pkt.

Układ prowadzący do oczekiwanego zachowania na 1. etapie (pierwsze kilka mikrosekund) wraz z podaniem wartości parametrów liczbowych odpowiednich elementów – 2 pkt.

Układ prowadzący do oczekiwanego zachowania na 2. etapie (po upływie 1 ms) wraz z podaniem wartości parametrów liczbowych odpowiednich elementów – 2 pkt.

Układ prowadzący do oczekiwanego zachowania na 3. etapie (po upływie 1 s) wraz z podaniem wartości parametrów liczbowych odpowiednich elementów – 2 pkt.

### Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

#### Równania ruchu

Kulka porusza się po okręgu o promieniu  $l$ . Styczna do okręgu składowa siła działająca na kulkę jest dana wzorem

$$F_s = -mg \sin \alpha - b \cdot v \cdot |v|,$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem odchylenia nici od pionu,  $-mg \sin \alpha$  – odpowiednią składową siły ciężkości (znak „–” wskazuje, że siła ta przeciwstawia się odchyleniu),  $v = l \frac{d\alpha}{dt}$  – prędkością kulki,  $-b \cdot v \cdot |v|$  – siłą oporu (taki zapis gwarantuje, że jest ona skierowana przeciwnie do prędkości).

Ruch kulki jest zatem określony przez równanie

$$\varepsilon = -\frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{bl}{m} \omega |\omega|,$$

Gdzie  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ ,  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ . Równanie to można przepisać w postaci układu równań

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{bl}{m} \omega |\omega|, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \omega. \end{aligned}$$

Gdy wprowadzimy zmienne bezwymiarowe  $T = \sqrt{\frac{g}{l}} t$ ,  $\Omega = \omega / \sqrt{\frac{g}{l}}$ , ten układ równań przyjmie

postać zawierającą tylko jedną stałą  $B = \frac{bl}{m}$

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dT} &= -\sin \alpha - B \cdot \Omega |\Omega|, \\ \frac{d\alpha}{dT} &= \Omega.\end{aligned}$$

Do powyższych równań należy dodać warunek, że dla  $T = 0$  (czyli  $t = 0$ )

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \Omega = 0. \quad (14)$$

### Algorytm numeryczny

W celu rozwiązania numerycznego zamieniamy  $\frac{d\alpha}{dT} \rightarrow \frac{\Delta\alpha}{\Delta T}$ ,  $\frac{d\Omega}{dT} \rightarrow \frac{\Delta\Omega}{\Delta T}$ , gdzie  $\Delta T$  odpowiada różnicy między wartością w chwili  $T_n$  oraz w chwili  $T_{n+1} = T_n + \Delta T$ . Prowadzi to do układu równań różnicowych. Istnieje bardzo wiele algorytmów pozwalających na numeryczne rozwiązanie rozważanego zagadnienia. W niniejszym rozwiązaniu krok dzielimy na dwie części: najpierw wyznaczamy położenie w chwili  $T_n + \Delta T/2$ , w tym położeniu obliczamy siłę, na jej podstawie wyznaczamy prędkość w chwili  $T_n + \Delta T$ , a następnie położenie w chwili  $T_n + \Delta T$ . W efekcie dostajemy następujący układ równań rekurencyjnych wiążący odchylenie kulki w chwili  $T_n$  z odchyleniem w chwili  $T_{n+1}$ :

$$\alpha_{n+1/2} = \alpha_n + \Omega_n \cdot \Delta T/2, \quad (15)$$

$$\Omega_{n+1} = \Omega_n - (\sin \alpha_{n+1/2} + B \cdot \Omega_n |\Omega_n|) \cdot \Delta T, \quad (16)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1/2} + \Omega_{n+1} \cdot \Delta T/2. \quad (17)$$

Algorytm odpowiadający powyższym równaniom jest przy tej samej wartości  $\Delta T$  znacznie dokładniejszy od algorytmu, w którym położenie i prędkość w chwili  $T_n + \Delta T$  wyznaczamy wprost na podstawie siły odpowiadającej położeniu w chwili  $T_n$ .

Do powyższego układu równań należy dodać warunki (14) odpowiadające chwili  $T = 0 = T_0$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \Omega_0 = 0. \quad (18)$$

Powyższe równania rekurencyjne (15)–(17) można wykorzystać w arkuszu kalkulacyjnym. W arkuszu dostępnym na stronie [www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl) utworzono kolumny

$n$	$\alpha_n$	$\Omega_n$	$\alpha_{n+1/2}$	$\Omega_{n+1}$	$\alpha_{n+1}$	$T$	$t$ (s)
-----	------------	------------	------------------	----------------	----------------	-----	---------

gdzie  $n$  jest numerem kroku (i jednocześnie numeruje wiersze), a wyrażenia w pozostałych kolumnach odpowiadają wyrażeniom pojawiającym się w rozważanych równaniach rekurencyjnych. Wartości  $\alpha_n$  oraz  $\Omega_n$  dla  $n = 0$  są określone na podstawie wartości początkowych. Na podstawie wartości z kolumn  $\alpha_n$  oraz  $t$  (s) sporządzono wykres, przy czym wzięto pod uwagę wiersze dla  $t$  od 0 do 100 sekund.

Rozważane równania rekurencyjne bardzo łatwo jest również przekształcić na program komputerowy, który oblicza w pętli kolejne wartości położenia i prędkości zgodnie z następującym pseudokodem (ponieważ większość programów komputerowych nie akceptuje greckich liter, zamiast  $\alpha$ ,  $\Omega$  oraz  $\Delta T$  użyliśmy odpowiednio oznaczeń **alfa**, **Omega** oraz **dT**)

```

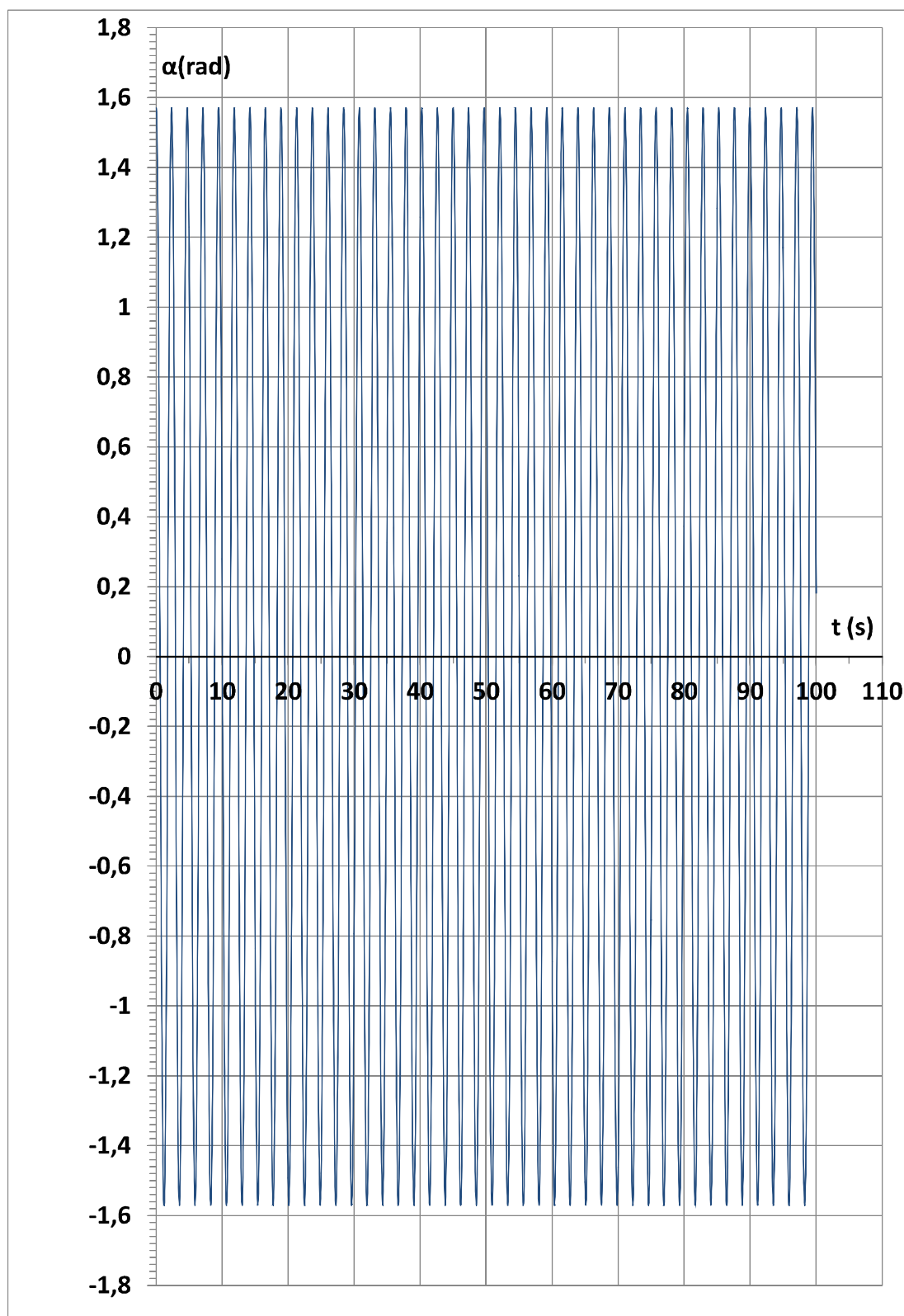
alfa= alfa + Omega * dT/2
Omega= Omega - (sin(alfa) + B * Omega * abs(Omega)) * dT
alfa= alfa + Omega * dT/2

```

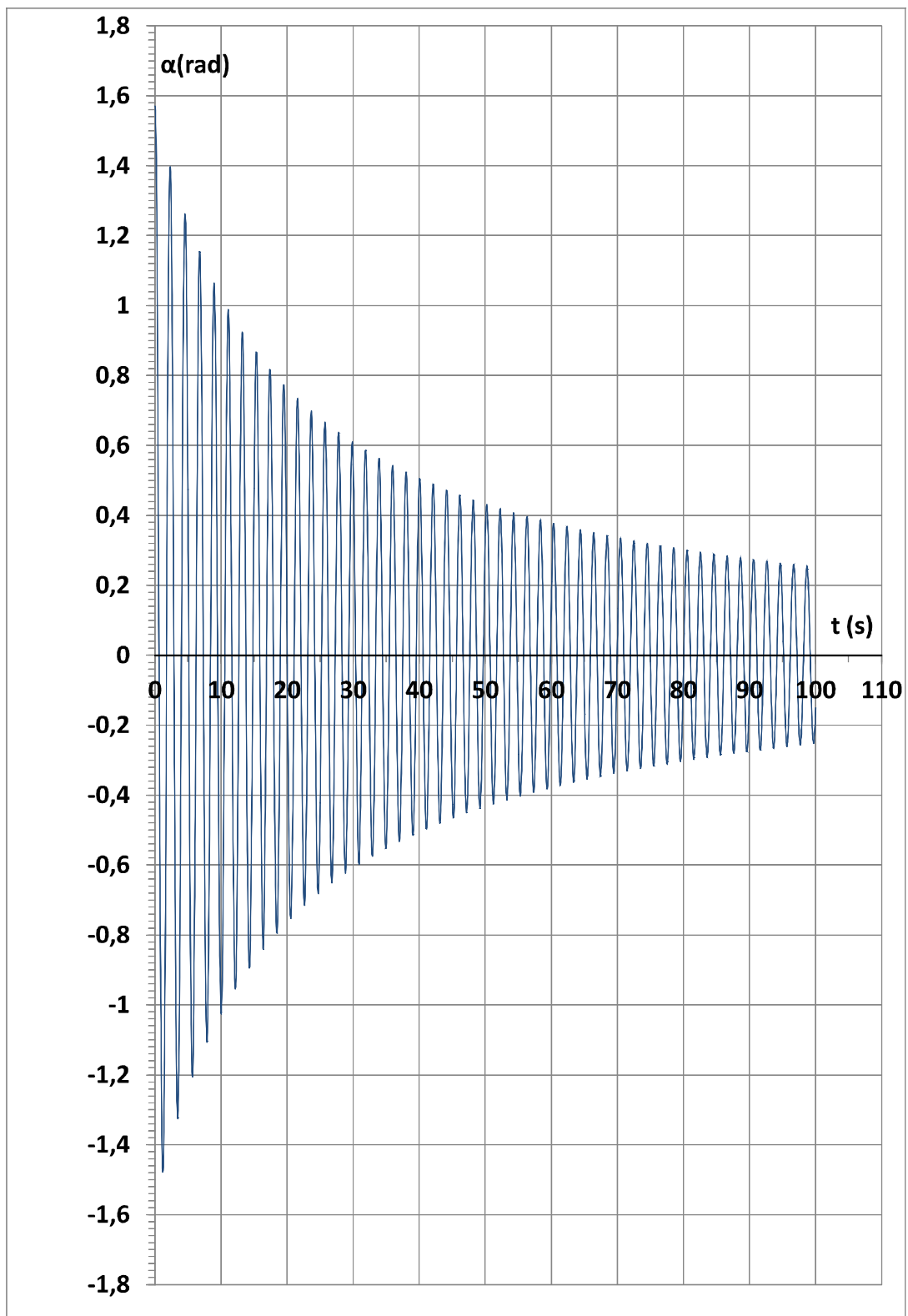
Do powyższych poleceń wykonywanych w pętli należy dodać przypisanie początkowych wartości zmiennym **alfa** oraz **Omega**, zapisywanie wartości **alfa** i **Omega** obliczonych w danym kroku (lub rysowanie) oraz warunek końca iteracji (chwila  $t = 100$  s, czyli  $T = \sqrt{\frac{g}{l}} 100$  s = 313). Programy w C++ oraz w Logo działające zgodnie z powyższym algorytmem są dołączone do rozwiązania dostępnego na stronie KGOF.

### Krok czasowy oraz sprawdzenie dokładności

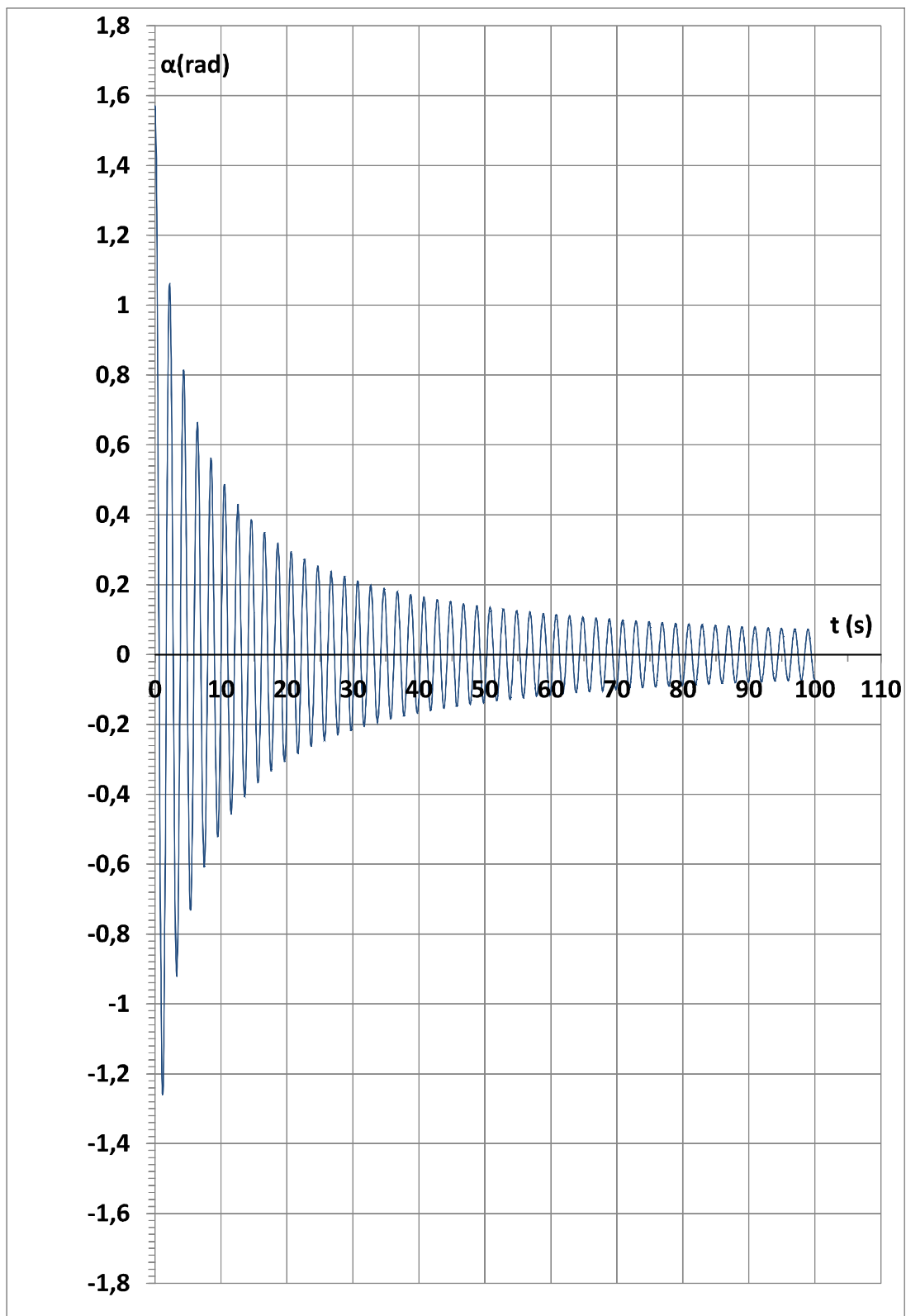
Dla każdej z podanych w treści zadania wartości parametru  $b$  wykonano wykresy dla  $\Delta T = 0,1565$  (2000 kroków) oraz  $\Delta T = 0,07825$  (4000 kroków) dla czasu  $t$  od 0 s do 100 s. Ponieważ dla danego  $b$  wykresy były wizualnie nieodróżnialne, a w szczególności końcowe położenie ciała było takie samo (w ramach dokładności odczytu położenia z wykresu) dla obu rozważanych wartości  $\Delta T$ , uznano, że  $\Delta T = 0,07825$  gwarantuje wystarczającą dokładność.



Rys 2. Wykres ruchu kulki dla  $b = 0$ .



Rys 3. Wykres ruchu kulki dla  $b = 0,0025 \text{ N s}^2/\text{m}^2$ .



Rys 4. Wykres ruchu kulki dla  $b = 0,01 \text{ N s}^2/\text{m}^2$ .

#### Wstępna dyskusja otrzymanych wykresów

W przypadku  $b = 0$  zgodnie z oczekiwaniami mamy do czynienia z drganiami nietłumionymi. Dla  $b > 0$  drgania są tłumione, przy czym szybkość tłumienia wzrasta ze wzrostem  $b$ .

**Czas, po którym amplituda drgań spadnie do połowy, oraz czas, po którym spadnie do jednej czwartej początkowej wartości**

Szukane czasy wyznaczono z wykresu. Zgodnie z poleceniem odczytano czasy odpowiadające maksymalnym wartościom odchylenia zbliżonym do  $\pi/4 = 0,79$  oraz do  $\pi/8 = 0,39$ .

Otrzymane wartości są następujące:

- dla  $b = 0$ : drgania nie są tłumione, zatem szukane czasy nie istnieją,
- dla  $b = 0,0025$ : czas spadku amplitudy do połowy  $T_{1/2} \approx 19$  s, czas spadku amplitudy do jednej czwartej  $T_{1/4} \approx 57$  s,
- dla  $b = 0,01$ : czas spadku amplitudy do połowy  $T_{1/2} \approx 5$  s, czas spadku amplitudy do jednej czwartej  $T_{1/4} \approx 14$  s.

Zauważmy, że ponieważ drgania są tłumione, pojęcie amplitudy drgań nie jest dokładnie określone. Ponieważ okres drgań wynosi około 2 s i ze względu na niedokładności przy odczytywaniu danych z wykresu, przyjęto, że niepewność powyższych wyników wynosi 1 s.

#### **Dyskusja otrzymanych czasów tłumienia oraz otrzymanych wykresów**

Zauważmy, że w obu przypadkach, w których występuje tłumienie, mamy  $T_{1/4} > 2 \cdot T_{1/2}$  (podczas gdy w przypadku siły oporu proporcjonalnej do prędkości zachodziłaby równość  $T_{1/4} = 2 \cdot T_{1/2}$ , tak jak dla rozpadu promieniotwórczego). Jest to zgodne z oczekiwaniem – szybszy wzrost tłumienia ze wzrostem prędkości oznacza równocześnie szybszy spadek tłumienia ze spadkiem prędkości, a więc ze spadkiem amplitudy. Również przyjrzenie się otrzymanym wykresom, szczególnie w przypadku  $b = 0,01$ , prowadzi do wniosku, że początkowo mamy do czynienia z silnym tłumieniem, jednak dla większych czasów (powyżej 60 s) szybkość spadku amplitudy drgań znacząco maleje.

#### **Punktacja zadania T4 (numerycznego)**

Równanie ruchu kulki wraz z warunkami początkowymi – 1 pkt.

Układ równań różnicowych lub rekurencyjnych pozwalający na numeryczne wyznaczenie ruchu – 1 pkt.

Opis algorytmu oraz sposobu jego implementacji – 1 pkt.

Przedstawienie sposobu weryfikacji prawidłowości otrzymanych wykresów – 2 pkt.

Wykresy zgodne z przedstawionymi w rozwiązaniu wzorcowym – 2 pkt.

Czasy tłumienia zgodne z otrzymanymi powyżej (wraz z podaniem niepewności wyniku) – 2 pkt.

Jakościowe omówienie otrzymanych wyników – 1 pkt.

Uwaga: nie jest wymagane, aby rozwiązanie zawierało przejście do zmiennych bezwymiarowych.