

LXIX OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA

CZĘŚĆ II

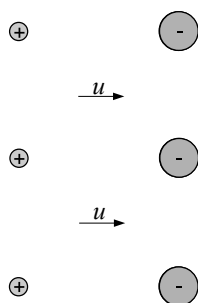
ZADANIA CZĘŚCI II (termin wysyłania rozwiązań — 15 listopada 2019 r.)

ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1.

Pod koniec roku 2018 doniesiono o locie modelu samolotu napędzanego silnikiem jonowym. Celem tego zadania jest oszacowanie siły ciągu oraz mocy takiego silnika.



Rys. 1. Schemat silnika jonolotu. Wektor \vec{u} to prędkość przepływu powietrza. (W celu wyznaczenia pola elektrycznego układ prętów zastępujemy przez jedną okładkę kondensatora, a układ walców – przez drugą.)

Rozważmy napęd jonowy składający z cienkich, równoległych przewodów (emiterów) oraz oddległych o d równoległych do nich przewodzących walców (kolektorów), patrz rysunek. Napięcie między emiterami a kolektorami wynosi U . Działanie napędu można opisać następująco:

- Silne pole elektryczne w pobliżu cienkich przewodów powoduje tworzenie jonów dodatnich, które następnie przemieszczają się pod wpływem pola elektrycznego w kierunku walców. Szybkość powstawania jonów (ładunek na jednostkę czasu) jest dana wzorem

$$I = \begin{cases} \alpha U (U - U_0) & \text{gdy } U > U_0, \\ 0 & \text{gdy } U \leq U_0, \end{cases}$$

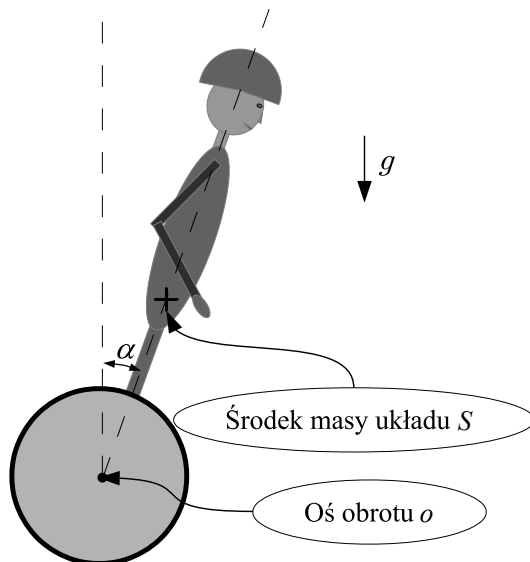
gdzie U_0 i α są stałymi (dla danej geometrii układu).

- Pole elektryczne między cienkimi przewodami a walcami powoduje przemieszczanie się jonów w kierunku walców. Przemierzając się jony zderzają się z cząsteczkami powietrza. Przyjmij, że rozważane tu pole jest takie, jak pole pomiędzy okładkami płaskiego kondensatora o odległości między okładkami znacznie mniejszej od rozmiarów liniowych okładek, a napięcie między okładkami jest równe U . Uwzględnij, że pole elektryczne o natężeniu E wywołuje ruch jonów względem powietrza z prędkością $v = \mu E$, gdzie μ jest stałą (dla ustalonych parametrów powietrza) zwaną ruchliwością jonów.
- Jony ulegają zubożeniu po zetknięciu się z powierzchnią kolektora.

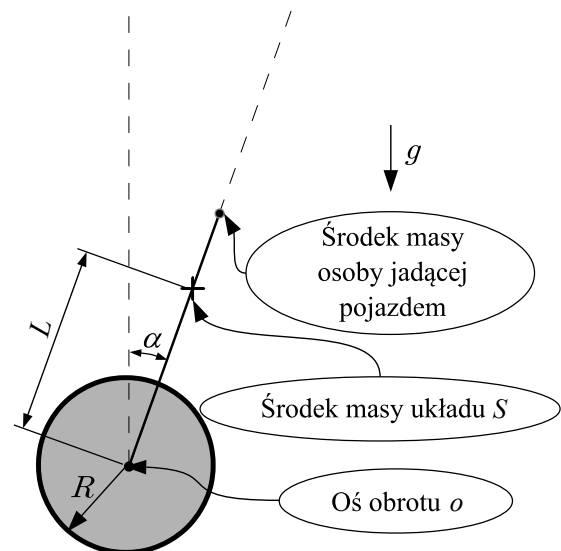
Przyjmując, że powietrze w obszarze między przewodami a walcami porusza się od przewodów do walców ze stałą prędkością u , a moc wydatkowana przez źródło napięcia wynosi P , wyznacz siłę ciągu tego napędu. Podaj wynik liczbowy dla $U = 40\,000\text{ V}$, $\mu = 2,0 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2/(\text{s} \cdot \text{V})$, $d = 0,2\text{ m}$, $u = 5\text{ m/s}$, $P = 600\text{ W}$, $U_0 = 20\,000\text{ V}$.

Zadanie T2.

Koła pewnego dwukołowego pojazdu (typu segway) umieszczone są na wspólnej osi o . Oś ta jest jednocześnie osią wirnika silnika elektrycznego napędzającego pojazd. Koła i wirnik są do siebie na stałe przymocowane i obracają się razem, a ich sumaryczny moment bezwładności względem osi o jest równy I . Całkowita masa pojazdu wraz z osobą jadącą na nim wynosi M . Promień każdego z kół jest równy R , środek masy S układu znajduje się w stałej odległości L od osi o . Przyspieszenie ziemskie wynosi g .



Rys. 2a. Pojazd typu segway wraz z jadącą nim osobą



Rys. 2b. Uproszczony rysunek pojazdu typu segway wraz z jadącą nim osobą

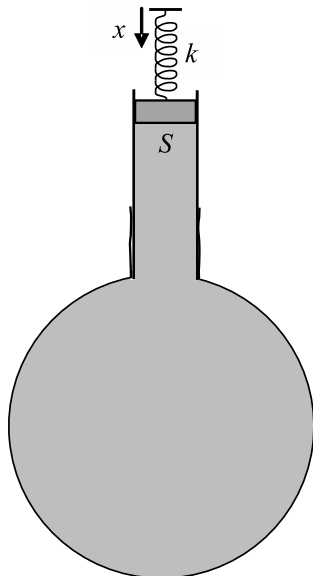
Pojazd porusza się po poziomym podłożu ze stałym przyspieszeniem a tak, że odcinek SO , gdzie O jest punktem na o w połowie odległości między kołami, tworzy z pionem kąt α , patrz rys. 2a. Koła toczą się bez poślizgu. Wyznacz przyspieszenie a .

Pomiń tarcie toczne i opór powietrza.

Uwaga: część układu niebędącą kołami ani wirnikiem możemy modelować przez nieważki pręt

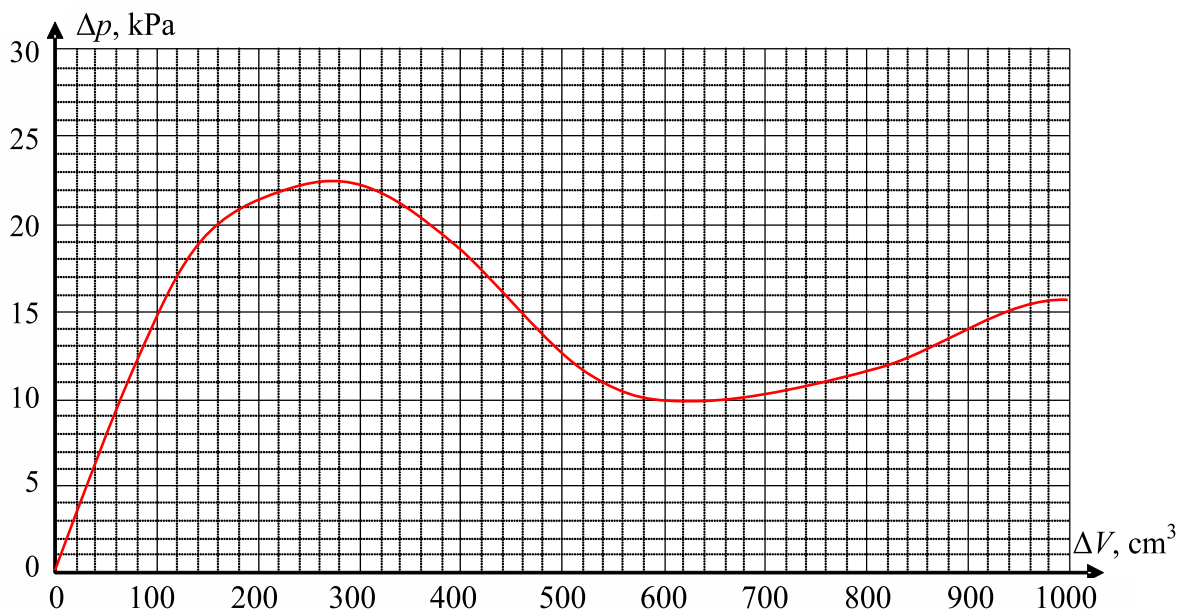
przymocowany na stałe do obudowy silnika, na końcu którego znajduje się punktowy ciężarek, patrz rys. 2b.

Zadanie T3.



Rys. 3a. Rurka z nałożonym gumowym balonikiem

Gumowy balonik nałożono na rurkę o przekroju wewnętrznym S , uszczelniono połączenie, całość wypełniono wodą i zamknięto rurkę tłokiem (patrz rys. 3a). Do tłoka dołączona jest sprężyna o stałej sprężystości k , której położenie górnego końca możemy regulować. Początkowo balonik był wypełniony, a ciśnienie w nim było równe zewnętrznemu. Objętość balonika (bez części naciągniętej na rurkę) była równa V . Wykres zależności nadwyżki ciśnienia (ponad ciśnienie zewnętrzne) Δp w baloniku od nadwyżki objętości ΔV ponad objętość początkową (bez rurki) V jest dany poniżej.



Rys. 3b. Zależność nadwyżki ciśnienia w baloniku od nadwyżki objętości

Pomiń ciężar wody i tłoka, a także tarcie tłoka o rurkę.

a) Wyznacz graficznie nadwyżkę ciśnienia w baloniku po przesunięciu górnego końca sprężyny w dół na odległość $x = 20$ cm. Przyjmij, że pole powierzchni tłoka wynosi $S = 10$ cm², a stała sprężystości sprężyny $k = 1$ N/cm.

b) Przesuwając powoli górny koniec sprężyny w dół zauważono, że w pewnym momencie nastąpiło skokowe przesunięcie tłoka (tzn. bardzo małe przesunięcie końca sprężyny spowodowało znaczne przesunięcie tłoka). Jaki warunek muszą spełniać parametry k i S , aby taka sytuacja była możliwa?

Warto zauważyć, że sytuacja opisana w punkcie b) jest analogiczna do efektu obserwowanego przy pompowaniu zwykłego balonika powietrzem – najpierw jest trudno go pompować, ale w pewnym momencie następuje gwałtowny wzrost objętości i dalsze pompowanie jest łatwiejsze.

Zadanie T4 - numeryczne.

Dwa miedziane bloki o wymiarach $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 0,5\text{ m}$ zetknięto ze sobą większymi powierzchniami, tak że razem utworzyły sześcian o wymiarach $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$. Początkowo jeden z bloków miał temperaturę 300 K, natomiast drugi był rozgrzany do 900 K. Cały układ jest izolowany cieplnie od otoczenia.

Moc P z jaką ciepło przepływa przez prostopadłościenne, jednorodnie ciało o wymiarach $\Delta x \times a \times b$, gdzie $\Delta x \ll a$, $\Delta x \ll b$, wyraża się wzorem:

$$P = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

gdzie ΔT jest różnicą temperatur między ścianami o wymiarach $a \times b$, A jest polem powierzchni każdej z tych ścian ($= ab$), natomiast λ jest przewodnictwem cieplnym rozważanego ciała.

Z dokładnością do 1 minuty wyznacz czas, po którym różnica temperatur pomiędzy zewnętrznymi, przeciwległymi ścianami bloków spadnie do: a) 100 K, b) 10 K.

Gęstość miedzi: $\rho = 9000$ kg · m⁻³, ciepło właściwe: $c = 380$ J · (K · kg)⁻¹, przewodnictwo cieplne $\lambda = 380$ W · (m · K)⁻¹. Pomiń rozszerzalność cieplną miedzi.

Uwagi:

Rozwiązanie powinno zawierać: wzory używane w rozwiązaniu (wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem), opis zastosowanego algorytmu, opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz ze sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyniku.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub gotowych programów do rozwiązywania równań różniczkowych.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Należy przesłać rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde z zadań doświadczalnych można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Zadanie D1.

Dioda półprzewodnikowa jest elementem elektronicznym o nieliniowej zależności między napięciem a natężeniem prądu. W typowym przypadku napięcie na diodzie spolaryzowanej w kierunku przewodzenia można opisać zależnością:

$$U = AT \log \left(\frac{I}{B} \right) + \frac{E_g}{e}, \quad (1)$$

gdzie:

U – napięcie na diodzie,

I – natężenie prądu płynącego przez diodę,

T – temperatura bezwzględna diody,

e – elementarny ładunek elektryczny,

A, B – stałe charakteryzujące diodę,

E_g – przerwa energetyczna (stała charakteryzująca półprzewodnik, z którego wykonana jest dioda).

Mając do dyspozycji:

- diodę krzemową (np. 1N4007) oraz czerwoną diodę świecącą (LED),
- wodę o temperaturze pokojowej, wrzątek oraz kostki lodu,
- klej, koszulkę termokurczliwą lub inne elementy zapewniające wodoszczelność,
- źródło napięcia stałego 9 V, np. baterię 6LF22,
- potencjometr ok. 50 k Ω ,
- 2 mierniki uniwersalne (multimetry),
- termometr (np. multimetr z sondą do pomiaru temperatury),
- przewody, krokodyłki i inne elementy potrzebne do zestawienia układu pomiarowego,
- papier milimetrowy,

wyznacz przerwę energetyczną E_g każdej z diod.

Uwaga: Zachowaj ostrożność przy pracy z gorącą wodą.

Zadanie D2.

Masz do dyspozycji:

- gitarę (akustyczną lub klasyczną),
- przyrząd do pomiaru częstotliwości drgań strun lub do strojenia gitary (np. telefon z odpowiednią aplikacją),
- kilka (6-7) ciężarków o znanej masie (ok. 50 g każdy),
- lekki woreczek foliowy,

- lekki, sztywny drut (np. spinacz biurowy),
- papier milimetrowy,
- podpórki (np. krzesła) umożliwiające stabilne ułożenie gitary w odpowiedniej pozycji,
- taśmę mierniczą.

Dla dwóch skrajnych strun gitary, bez zdejmowania ich z gryfu, wyznacz:

a) ich siłę naciągu

oraz

b) masę na jednostkę długości.

Wskazówka: prędkość fal poprzecznych w strunie wyraża się wzorem $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, gdzie μ oznacza masę na jednostkę długości struny, a F siłę jej naciągu.

Uwaga: Zachowaj ostrożność przy naciąganiu strun z uwagi na ryzyko ich pęknięcia.

Zadanie D3.

Masz do dyspozycji:

- kartki papieru A4 o znanej gramaturze (np. 80 g/m²),
- taśmę klejącą, linijkę, cyrkiel, ekierki, kątomierz, nożyczki, przybory do pisania (np. ołówki, długopisy, flamastry, kolorowe kredy),
- kamerę (np. w telefonie komórkowym) z funkcją nagrywania filmów o znanej liczbie klatek na sekundę,
- taśmę mierniczą dłuższą niż 2 m,
- komputer z odtwarzaczem multimedialnym pozwalającym na poklatkowe oglądanie filmu lub z programem umożliwiającym śledzenie punktu, np. Tracker <http://physlets.org/tracker/>.

Wyznacz współczynnik oporu aerodynamicznego stożków (samych powierzchni bocznych, bez podstaw) o kątach rozwarcia 45°, 60°, 90° poruszających się wzdłuż swoich osi. Przyjmij, że siła oporu powietrza dana jest wzorem $F_{\text{op}} = \frac{C\rho S v^2}{2}$, gdzie:

- C jest współczynnikiem oporu aerodynamicznego, który należy wyznaczyć,
- ρ gęstością ośrodka, w którym porusza się stożek,
- S polem powierzchni podstawy stożka,
- v prędkością stożka.

ROZWIĄZANIA

Rozwiązanie zadania T1

Jony poruszają się względem kolektorów i emiterów z prędkością $v_w = v + u$, zatem czas przelotu jonu jest równy d/v_w . Oznacza to, że w każdej chwili całkowity ładunek w obszarze między przewodami a walcami wynosi

$$Q = \frac{I \cdot d}{v_w}. \quad (2)$$

Na ten ładunek działa siła F równa

$$F = QE, \quad (3)$$

gdzie E jest natężeniem pola elektrycznego w rozważanym obszarze. Zgodnie z treścią zadania, to pole jest takie, jak dla kondensatora płaskiego, a zatem

$$E = \frac{U}{d}. \quad (4)$$

Czyli wzór na prędkość jonów względem powietrza przyjmuje postać

$$v = \mu \frac{U}{d}, \quad (5)$$

a prędkość jonów względem jonolotu wynosi

$$v_w = u + \mu \frac{U}{d}. \quad (6)$$

Ponieważ jony poruszają się ze stałą prędkością, siła, z jaką oddziałuje na nie pole, (oznaczona wyżej jako F) jest równa sile ich oddziaływania na powietrze (sile ciągu). Jest ona równa

$$F = I \cdot \frac{d}{u + \mu U/d} E = I \cdot \frac{U}{u + \mu U/d}. \quad (7)$$

Moc wydatkowana przez źródło napięcia to po prostu

$$P = UI. \quad (8)$$

Uwzględniając tę zależność otrzymujemy ostateczny wynik na szukaną siłę ciągu

$$F = \frac{1}{u + \mu U/d} P. \quad (9)$$

Powyższy wynik można też wyprowadzić bezpośrednio, korzystając z faktu, że jeśli jony poruszają się ze stałą prędkością v_w , to moc niezbędna do utrzymania tego ruchu wynosi

$$P = F \cdot v_w, \quad (10)$$

gdzie F jest siłą oporu działającą na jony. Ponieważ źródłem siły powodującej ruch jonów są kolektory i emitery (a bezpośrednio – wytwarzane przez nie pole elektryczne), z III zasady dynamiki wynika, że siła działająca na kolektory i emitery (a więc napędzająca jonolot) wynosi również F . Zauważmy, że moc P z powyższego wzoru to moc wydatkowana przez źródło napięcia, o której jest mowa w treści zadania. Zatem

$$F = \frac{P}{v_w} \quad (11)$$

i, uwzględniając, że $v_w = u + \mu U/d$, dostajemy wzór (9).

Zauważmy, że przy napięciu mniejszym od U_0 prąd nie będzie płynął, a zatem P będzie równe 0, a w konsekwencji siła ciągu będzie równa 0.

Po podstawieniu wartości liczbowych dostajemy

$$F = 13,3 \text{ N.} \quad (12)$$

Punktacja zadania T1.

I metoda – rozważenie prądów płynących między okładkami.

Związek między ładunkiem między okładkami a natężeniem prądu I (wzór (2)) 2 pkt.
Siła ciągu napędu wyrażona przez ładunek między okładkami i napięcie między nimi (wzór (3)) lub wyrażenie równoważne 1 pkt.
Wykorzystanie wzoru (4) na natężenie pola elektrycznego wewnątrz kondensatora płaskiego 1 pkt.
Prędkość jonów względem jonolotu (wzór (6)) 2 pkt.
Moc potrzebna do działania układu (wzór (8)) 1 pkt.
Wynik końcowy na siłę ciągu (wzór (9)) 2 pkt.
Wynik liczbowy (wzór (12)) 1 pkt.

II metoda – bezpośrednio skorzystanie ze wzoru na pracę.

Zauważenie, że siła ciągu to siła utrzymująca ruch jonów 2 pkt.
Wykorzystanie wzoru (11) na siłę wyrażoną przez moc, wraz z właściwą interpretacją parametrów 2pkt.
Wykorzystanie wzoru (4) na natężenie pola elektrycznego wewnątrz kondensatora płaskiego 1 pkt.
Prędkość jonów względem jonolotu (wzór (6)) 2 pkt.
Wynik końcowy na siłę ciągu (wzór (9)) 2 pkt.
Wynik liczbowy (wzór (12)) 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T2

Rozwiązanie I

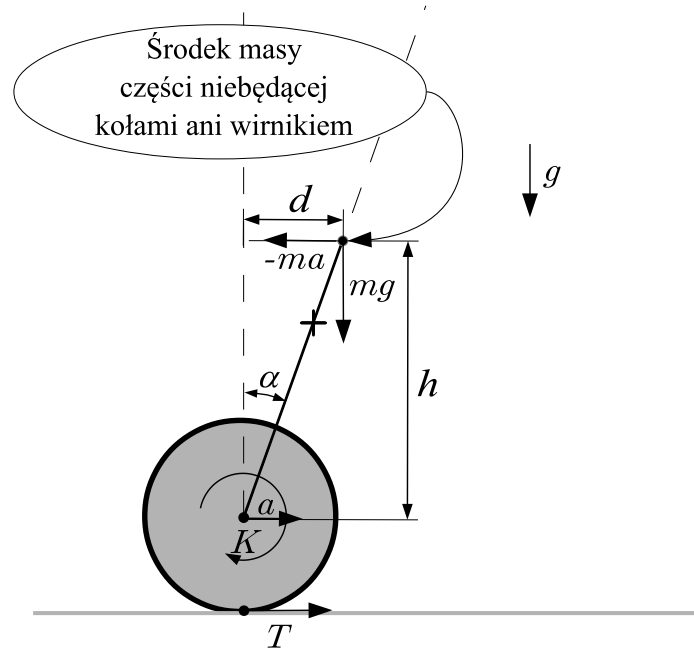
Na koła wraz z wirnikiem działa moment siły tarcia o podłoże T oraz moment pochodzący od silnika K (patrz rys. 1; nie zaznaczona na rysunku pionowa siła reakcji podłoża jest skierowana w stronę osi i związany z nią moment siły względem tej osi jest równy 0). To oznacza, że ich przyspieszenie kątowe wynosi

$$\varepsilon = \frac{K - RT}{I}. \quad (13)$$

Ponieważ nie ma poślizgu, pojazd porusza się z przyspieszeniem

$$a = \varepsilon R. \quad (14)$$

Oznaczmy przez m masę części układu niebędącą kołami ani wirnikiem, przez d – odległość w poziomie jej środka masy od osi wirnika i kół, a przez h – wysokość tego środka masy ponad



Rysunek 1: Uproszczony rysunek do rozwiązania I zadania T2. Zaznaczono siłę tarcia T , moment siły działający na koła i pochodzący od silnika K , siłę ciężkości mg oraz siłę bezwładności $-ma$. Odległości h oraz d określają położenie środka masy części niebędącej kołami ani wirnikiem.

rozważaną oś (zgodnie z rys. 1). Na tę część układu, w układzie nieinercyjnym związanym z tą osią silnika, działa względem tej osi moment siły grawitacji mgd , skierowany przeciwie do niego moment siły bezwładności o wartości mah oraz moment siły pochodzący od silnika. Ponieważ ta część układu się nie obraca, te momenty sił się równoważą

$$mgd - mah = K. \quad (15)$$

Z definicji środka masy mamy

$$md + (M - m) \cdot 0 = ML \sin \alpha, \quad mh + (M - m) \cdot 0 = ML \cos \alpha, \quad (16)$$

gdzie $M - m$ jest masą kół i wirnika, a przemnożenie przez 0 wynika stąd, że ich wspólny środek masy leży na osi. Zatem wzór (15) przyjmuje postać

$$MgL \sin \alpha - MaL \cos \alpha = K. \quad (17)$$

Jedyną zewnętrzną poziomą siłą działającą na układ to siła tarcia, a skoro układ porusza się z przyspieszeniem a , to

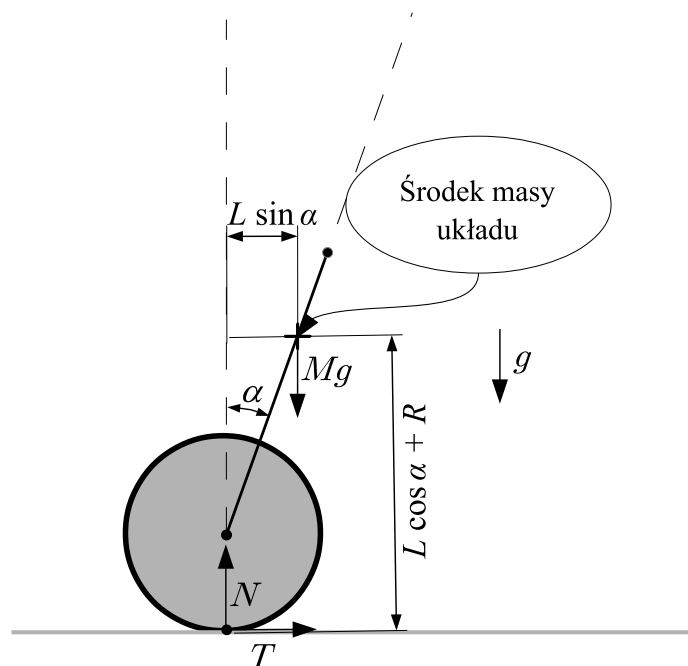
$$Ma = T. \quad (18)$$

Przekształcając powyższe równania tak, by wyeliminować K , T , ε otrzymamy

$$\frac{a}{R}I = MgL \sin \alpha - MaL \cos \alpha - RMa. \quad (19)$$

Z powyższego

$$a = \frac{MgL \sin \alpha}{\frac{I}{R} + M(L \cos \alpha + R)} \quad (20)$$



Rysunek 2: Uproszczony rysunek do rozwiązania II zadania T2. Zaznaczono siłę tarcia T , siłę ciężkości Mg oraz reakcji podłoża N . Zaznaczono też odległości określające położenie środka masy układu.

Rozwiązanie II

Na układ działają następujące siły zewnętrzne (patrz rys. 2):

Pionowe: siła grawitacji Mg oraz siła reakcji podłoża N ;

Pozioma: siła tarcia statycznego T .

Z drugiej zasady dynamiki mamy

$$Ma = T, \quad Mg - N = 0. \quad (21)$$

Tylko siły N i T dają wkład do całkowitego momentu siły działającego na układ względem jego środka masy. Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego otrzymamy

$$NL \sin \alpha - T(L \cos \alpha + R) = I\varepsilon, \quad (22)$$

gdzie ε jest przyspieszeniem kątowym kół wraz z wirnikiem silnika (zwróćmy uwagę, że chociaż oś obrotu kół z wirnikiem nie przechodzi przez środek masy, to całkowity moment pędu układu pochodzi tylko od tego obrotu – nie ma innych obracających się elementów). Ponieważ nie ma poślizgu, mamy $\varepsilon = a/R$ i z równań ((21), (22)) dostajemy

$$MgL \sin \alpha - Ma(L \cos \alpha + R) = I \frac{a}{R}, \quad (23)$$

a stąd otrzymujemy wynik (20).

Punktacja zadania T2.

Rozwiązanie I

Identyfikacja momentów siły działających na koła oraz wyrażenie (wzór (13) lub równoważny) na ich przyspieszenie kątowe	1 pkt.
Związek między przyspieszeniem pojazdu a przyspieszeniem kątowym każdego z kół (wzór (14))	1 pkt.
Równowaga momentów sił działających na pręt (wzór (17) lub równoważny)	2 pkt.
II zasada dynamiki dla pojazdu jako całości (wzór (18))	2 pkt.
Równanie pozwalające na wyznaczenie przyspieszenia (wzór (19) lub równoważny) ..	2 pkt.
Wynik końcowy (wzór (20))	2 pkt.

Rozwiązanie II

Identyfikacja sił zewnętrznych działających na układ oraz zapisanie II zasady dynamiki dla tego układu (wzór (21) lub równoważny)	2 pkt.
II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego (wzór (22) lub równoważny)	3 pkt.
Związek między przyspieszeniem pojazdu a przyspieszeniem kątowym każdego z kół (wzór (14))	1 pkt.
Równanie pozwalające na wyznaczenie przyspieszenia (wzór (23) lub równoważny) ..	2 pkt.
Wynik końcowy (wzór (20))	2 pkt.

Rozwiązanie zadania T3

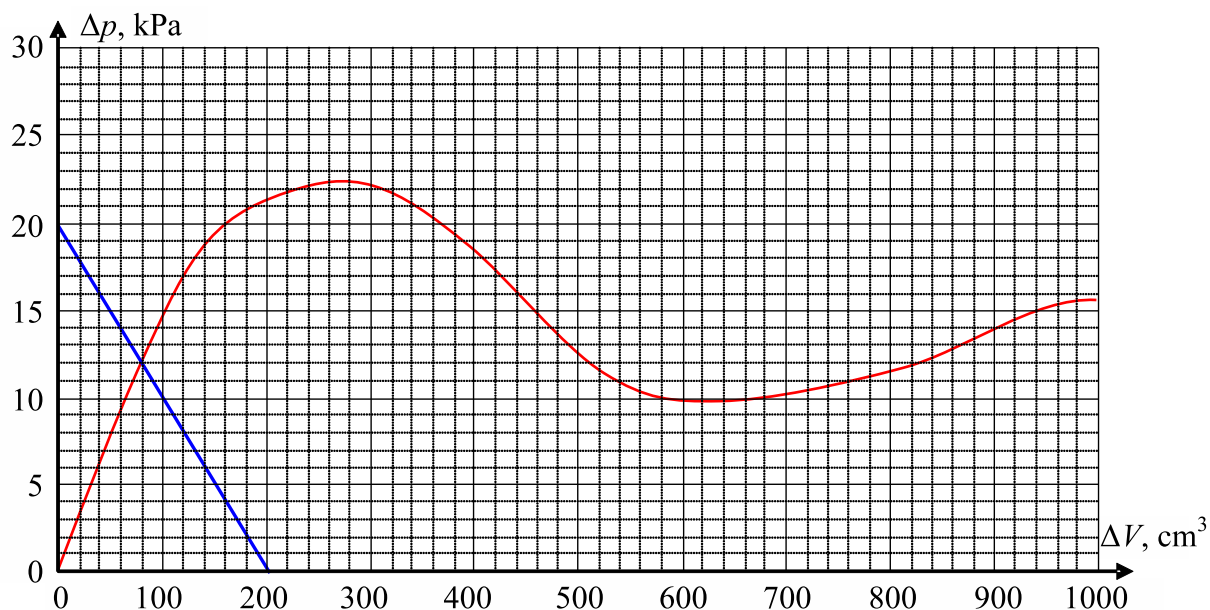
Ze względu na nieściśliwość wody przesunięcie tłoka jest równe $\Delta V/S$. Jeśli przesunięcie górnego końca sprężyny względem położenia początkowego wynosi x , to skrócenie sprężyny wynosi $x - \Delta V/S$, a siła nacisku sprężyny na tłok jest równa $k(x - \Delta V/S)$. Ta siła jest równoważona przez parcie wody, zatem wzrost ciśnienia w baloniku jest równy

$$\Delta p = \frac{k}{S^2}(xS - \Delta V). \quad (24)$$

Przy ustalonym x wykresem tej zależności Δp od ΔV jest linia prosta.

a) Przy danych wartościach x , S i k równanie (24) przyjmuje postać

$$\Delta p = 20 \text{ kPa} - 0,1 \text{ kPa} \frac{\Delta V}{\text{cm}^3}. \quad (25)$$

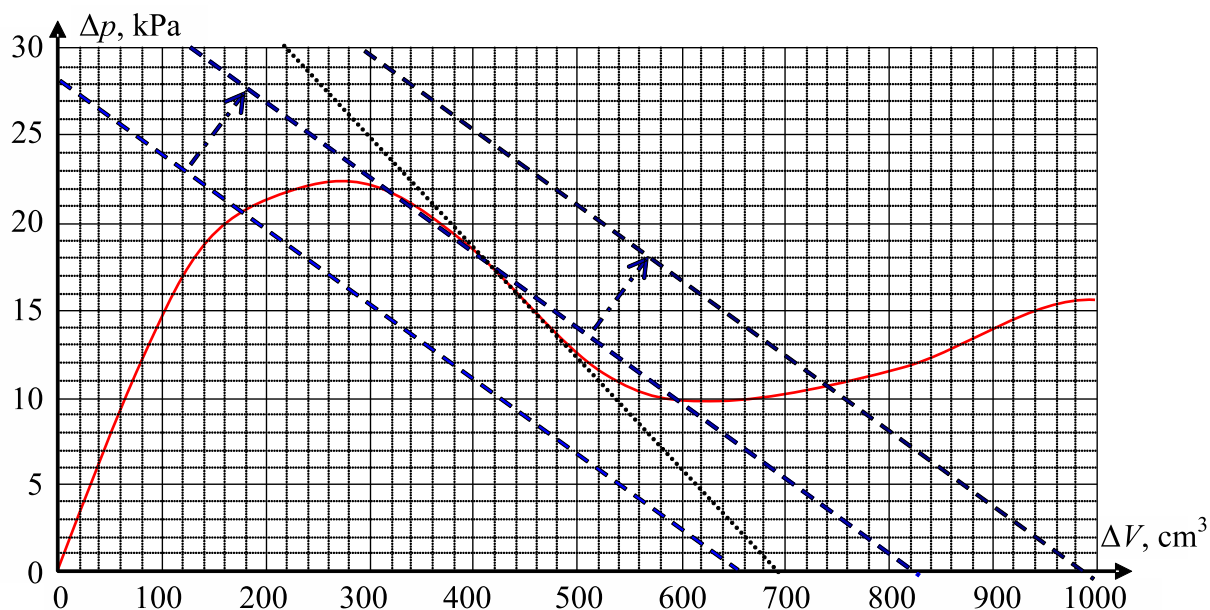


Rysunek 3: Prosta dana równaniem (25) oraz zależność nadwyżki ciśnienia w baloniku od nadwyżki objętości

Wykresem powyższej zależności jest prosta przecinająca oś pionową w punkcie $\Delta p = 20$ kPa, natomiast oś poziomą – w punkcie $\Delta V = 200$ cm³. Ta prosta przecina daną krzywą $\Delta p(\Delta V)$ w punkcie o współrzędnych $\Delta V = 80$ cm³ oraz $\Delta p = 12$ kPa. Zatem rozwiązaniem jest

$$\Delta p = 12 \text{ kPa.} \quad (26)$$

b) Gdy x rośnie, prosta opisana wzorem (24) przesuwa się w górę bez zmiany nachylenia, a punkt przecięcia z danym wykresem – w prawo wzdłuż wykresu (patrz linie przerywane na rys. 4).



Rysunek 4: Proste dane równaniem (24), krzywa zależności nadwyżki ciśnienia w baloniku od nadwyżki objętości oraz linia odpowiadająca maksymalnemu nachyleniu tej krzywej

Aby ten punkt przemieścił się w sposób nieciągły, nachylenie prostej musi być mniejsze (co do wartości bezwzględnej) od maksymalnego ujemnego nachylenia danego wykresu. Wynosi ono około $\Delta p/\Delta V = -0,063 \text{ kPa/cm}^3 = -6,3 \cdot 10^7 \text{ Pa/m}^3$. Zatem szukany warunek ma postać

$$\frac{k}{g^2} < 6,3 \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}. \quad (27)$$

Punktacja zadania T3.

Zależność Δp od x oraz ΔV (wzór (24) lub równoważny) 2 pkt.

Zauważenie, że szukane Δp odpowiada punktowi przecięcia prostej danej wzorem (24)

z krzywą zależności Δp w baloniku od ΔV 1 pkt.

Wykonanie odpowiedniego wykresu 1 pkt.

Wynik końcowy (wzór (26)) 1 pkt.

Zauważenie, że ze wzrostem x prosta (24) przesuwa się w górę bez zmiany współczynnika kierunkowego, a punkt przecięcia z danym wykresem – w prawo wzdłuż wykresu

2 pkt.

Zauważenie, że aby położenie punktu przecięcia prostej z wykresem mogło zmienić się w sposób nieciągły, nachylenie prostej musi być mniejsze (co do wartości bezwzględnej)

od maksymalnego ujemnego nachylenia danego wykresu 2 pkt.

Szukany warunek (nierówność (27) z wartością liczbową w granicach od $6,0 \cdot 10^7 \text{ Pa/m}^3$ do $6,6 \cdot 10^7 \text{ Pa/m}^3$) 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

Na początku zauważmy, że po bardzo długim czasie temperatura całego bloku ustali się na 600 K. Ze względu na symetrię problemu wiemy, że ciepło będzie się rozchodzić wzdłuż osi równoległej do krótszych boków bloków miedzi (oznaczymy tę oś przez x), więc problem, który należy rozwiązać, jest jednowymiarowy.

Podzielmy blok poprzecznie do osi x na N warstw o grubości $\Delta x = 1 \text{ m}/N$ i ponumerujmy je od 1 do N (będziemy używać tu zmiennej i). Oznaczmy współrzędną x środka warstwy i przez x_i , a temperaturę w miejscu x_i przez T_i . Przyjmiemy, że średnia temperatura warstwy i jest równa temperaturze w środku tej warstwy, czyli T_i . Ciepło do warstwy i może zostać pobrane od warstw $i - 1$ oraz $i + 1$ lub im oddane. Energia, jaka w krótkim czasie Δt dopływa do przekroju prostopadłego do osi x i przechodzącego przez x_i (w skrócie: przekroju x_i) od przekroju prostopadłego do osi x i przechodzącego przez x_{i+1} (w skrócie: przekroju x_{i+1}) zgodnie ze wzorem z treści zadania jest równa

$$Q_{i+1,i} = \Delta t \lambda A \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}. \quad (28)$$

Zauważmy, że gdy $T_{i+1} < T_i$ to $Q_{i+1,i}$ jest ujemne, czyli ciepło odpływa od przekroju x_i .

Analogicznie, energia, jaka w krótkim czasie Δt dopływa do przekroju x_i od przekroju x_{i-1} jest równa

$$Q_{i-1,i} = \Delta t \lambda A \frac{T_{i-1} - T_i}{\Delta x}. \quad (29)$$

Zatem całkowita energia, jaka w krótkim czasie Δt która dopływa do przekroju x_i jest równa

$$Q_i = \Delta t \lambda A \left(\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} - \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \right), \quad (30)$$

gdzie $A = 1 \text{ m}^2$ jest polem przekroju.

Zgodnie z założeniem, że T_i jest średnią temperaturą warstwy i , przyjmujemy, że powyższe Q_i jest energią dopływającą do tej warstwy. Ta energia spowoduje zmianę temperatury T_i o $\Delta T_i = Q_i / (c\Delta m)$, gdzie $\Delta m = \rho A \Delta x = \rho \cdot 1 \text{ m}^3 / N$ jest masą jednej warstwy. Zatem w chwili $t_{j+1} = t_j + \Delta t$ temperatura $T_i(t_{j+1})$ warstwy i jest dana wzorem

$$T_i(t_{j+1}) = T_i(t_j) + \frac{\Delta t \lambda}{\Delta x^2 \rho c} (T_{i+1}(t_j) - 2T_i(t_j) + T_{i-1}(t_j)). \quad (31)$$

Powyższy wzór jest prawdziwy tylko dla warstw, które mają dwie sąsiadki. Dla skrajnych warstw ($i = 1$ oraz $i = N$) mamy

$$T_1(t_{j+1}) = T_1(t_j) + \frac{\Delta t \lambda}{\Delta x^2 \rho c} (T_2(t_j) - T_1(t_j)), \quad T_N(t_{j+1}) = T_N(t_j) + \frac{\Delta t \lambda}{\Delta x^2 \rho c} (T_{N-1}(t_j) - T_N(t_j)). \quad (32)$$

Równanie (32) można otrzymać z równania (31) wprowadzając sztuczne warstwy 0 oraz $N + 1$, takie, że $T_0 = T_1$, $T_{N+1} = T_N$.

Zgodnie z treścią zadania, w chwili początkowej $t_0 = 0$ mamy

$$T_i(t_0) = \begin{cases} 300 \text{ K} & \text{dla } i \leq N/2, \\ 900 \text{ K} & \text{dla } i > N/2. \end{cases} \quad (33)$$

W powyższym wzorze założyliśmy, że N jest parzyste i tylko takie N będziemy rozważać.

Iterując równania (31, 32) możemy rozwiązać nasze zagadnienie. Procedura może przebiegać następująco:

0. Wybieramy N oraz Δt (np. $N = 1000$, $\Delta t = 0,1 \text{ s}$).

1. Przypisujemy $T_i(t_0)$ zgodnie z (33).

2. Znając dla danego t_j wszystkie $T_i(t_j)$ ($i = 1 \dots N$) i korzystając z (31, 32) wyznaczamy wszystkie $T_i(t_{j+1})$ ($i = 1 \dots N$), gdzie $t_{j+1} = t_j + \Delta t$.

Powtarzamy punkt 2. aż do momentu (czyli do takiego t_j), gdy

$$|T_N(t_{j+1}) - T_1(t_{j+1})| \leq \Delta T,$$

gdzie w przypadku a) $\Delta T = 100 \text{ K}$, natomiast w przypadku b) $\Delta T = 10 \text{ K}$. Wartość $t = t_{j+1} - t_0$ jest szukanim czasem wyrównywania temperatur.

Aby zagwarantować właściwą dokładność wyniku należy powtórzyć powyższą procedurę dla zwiększonego N (np. dwukrotnie), oraz zmniejszonego Δt (też np. dwukrotnie). Jeśli w granicach oczekiwanej dokładności wyznaczony czas nie ulegnie zmianie, możemy przyjąć, że jest on szukanim wynikiem.

Skoro oczekiwana dokładność wynosi 1 min, nie ma sensu rozważać $\Delta t > 1 \text{ min}$. Zauważmy również, że dla $i = N/2$ wartość wyrażenia $\frac{\Delta t \lambda}{\Delta x^2 \rho c} (T_{i+1}(t_0) - 2T_i(t_0) + T_{i-1}(t_0))$ może być duża, bo $T_{N/2+1} - T_{N/2} = 600 \text{ K}$ i należy tak dobrać Δt oraz N , by taki przypadek nie nastąpił.

Na stronie internetowej KGOF znajdują się programy w C++ oraz VBA będące realizacją powyżej opisanego algorytmu. Program w VBA umożliwia dodatkowo w arkuszu kalkulacyjnym wybranie innych wartości parametrów.

Otrzymano

dla $N = 10$, $\Delta t = 10$ s w przypadku a) $t = 31$ min, w przypadku b) $t = 66$ min;

dla $N = 100$, $\Delta t = 0,1$ s w przypadku a) $t = 30,9$ min, w przypadku b) $t = 65,9$ min;

dla $N = 300$, $\Delta t = 0,01$ s w przypadku a) $t = 30,9$ min, w przypadku b) $t = 65,9$ min.

Zatem z dokładnością oczekiwaną w zadaniu można przyjąć w przypadku a) $t = 31$ min, w przypadku b) $t = 66$ min.

Punktacja zadania T4.

Idea podziału bloku na warstwy, między którymi rozważamy przepływ ciepła 1 pkt.
 Wypadkowe ciepło dopływające do danej warstwy (wzór (30) lub równoważny) 2 pkt.
 Temperatura warstwy w kolejnym kroku czasowym (wzór (31) lub równoważny) wraz z uwzględnieniem jawnym (wzór (32) lub równoważny) lub opisowym odmiennej sytuacji skrajnych elementów 2 pkt.
 Opis algorytmu pozwalającego na wyznaczenie szukanych czasów 2 pkt.
 Wynik liczbowy w przypadku a) $t = (31 \pm 1)$ min 1 pkt.
 Wynik liczbowy w przypadku b) $t = (66 \pm 1)$ min 1 pkt.
 Przedstawienie sposobu upewnienia się, że otrzymany wynik jest poprawny 1 pkt.

Rozwiązanie zadania D1.

Część teoretyczna.

Dioda jest elementem elektronicznym o niesymetrycznym charakterze przewodzenia prądu elektrycznego – dla takiej samej wartości napięcia na diodzie natężenie prądu jest znacznie wyższe w przypadku polaryzacji w kierunku przewodzenia niż w kierunku zaporowym. W diodach półprzewodnikowych asymetria ta jest związana z różnicą domieszkowania materiału półprzewodnikowego. Celem tego doświadczenia jest wyznaczenie wartości przerwy energetycznej w materiale półprzewodnikowym, z którego wykonana jest dioda.

Zgodnie ze wzorem podanym w treści zadania, zależność napięcia na diodzie od natężenia prądu elektrycznego przez nią płynącego można wyrazić następującym wzorem:

$$U = AT \log \left(\frac{I}{B} \right) + \frac{E_g}{e}. \quad (34)$$

We wzorze tym występuje szukana przez nas wartość szerokości przerwy energetycznej E_g . Jednak występują w nim również nieznanne stałe A oraz B . Obecność tych stałych uniemożliwia wyznaczenie szerokości przerwy energetycznej w jednym tylko pomiarze.

Jeżeli założymy jednak, że natężenie prądu elektrycznego płynącego przez diodę będzie utrzymywane na stałym poziomie, to wyrażenie $A \log \left(\frac{I}{B} \right)$ można zastąpić przez stałą C . Wtedy wyrażenie (2) przyjmie postać:

$$U = CT + \frac{E_g}{e}. \quad (35)$$

Mamy zatem do czynienia z liniową zależnością napięcia na diodzie od temperatury, przy stałej wartości natężenia prądu. Wykonanie zatem serii pomiarów napięcia na diodzie dla kilku

temperatur przy ustalonym natężeniu prądu pozwoli na dopasowanie zależności liniowej do danych doświadczalnych i wyznaczenie stałej $\frac{E_g}{e}$, a więc wyznaczenie szukanej wartości E_g . W tym wypadku niepewność pomiarową można oszacować graficznie, uwzględniając niepewności pomiarowe poszczególnych punktów pomiarowych.

Warto zaznaczyć, że zadanie można również rozwiązać bez zakładania stałej wartości natężenia prądu. W takim przypadku wystarczy wykonać pomiar dla trzech różnych zestawów parametrów U , I oraz T . Wtedy otrzymamy układ równań z trzema niewiadomymi A , B oraz $\frac{E_g}{e}$.

$$\begin{cases} U_1 = AT_1 \log\left(\frac{I_1}{B}\right) + \frac{E_g}{e} \\ U_2 = AT_2 \log\left(\frac{I_2}{B}\right) + \frac{E_g}{e} \\ U_3 = AT_3 \log\left(\frac{I_3}{B}\right) + \frac{E_g}{e} \end{cases} \quad (36)$$

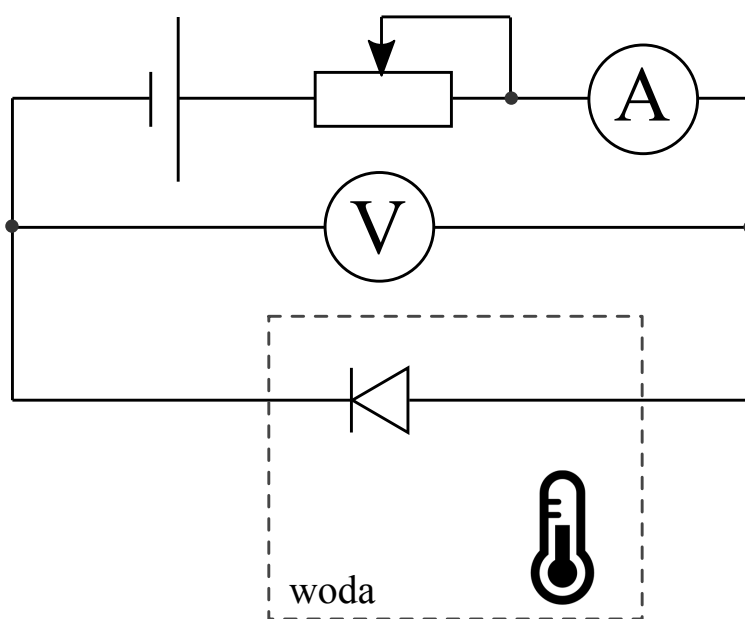
Po wstawieniu do niego zmierzonych wartości U , I oraz T można ten układ rozwiązać i wyznaczyć szukaną wartość E_g . W tym wypadku ocenę niepewności pomiarowej należy przeprowadzić np. na podstawie średniej z kilku serii pomiarowych lub też za pomocą bezpośredniej analizy wpływu na wynik końcowych niepewności mierzonych wartości napięcia, natężenia prądu oraz temperatury.

Część doświadczalna.

Pomiar napięcia na diodzie w zależności od natężenia płynącego przez nią prądu można przeprowadzić, wykorzystując obwód elektryczny schematycznie przedstawiony na Rys. 8.

Zmianę temperatury diody można zapewnić poprzez jej kontakt termiczny z wodą o znanej temperaturze (mierzonej termometrem dostępnym w zestawie pomiarowym).

Po zestawieniu układu należy dobrać odpowiednie natężenie prądu poprzez regulację położenia suwaka potencjometru. Optymalnym wyborem będzie taka wartość, która pozwoli na pomiar napięcia przy stałym natężeniu prądu dla zakresu temperatur od 0°C do 100°C . Jednocześnie należy pamiętać, że zbyt wysokie natężenie prądu może prowadzić do nagrzewania się diody,



Rysunek 5: Schemat obwodu elektrycznego do pomiarów elektrycznych diody w zadaniu D1.

Dioda LED czerwona

T (K)	U (mV)
276	1816
283	1821
291	1825
295	1828
298	1829
304	1832
307	1834
312	1837
315	1840
322	1844
333	1849
338	1853
345	1857
352	1861
357	1863
363	1867

Tabela 1: Dane pomiarowe dla diody LED czerwonej

Dioda 1N4007 MIC

T (K)	U (mV)
360	323
358	327
353	335
348	353
343	359
338	370
333	383
328	396
323	407
318	420
313	432
308	445
303	459
298	471
285	501
281	512

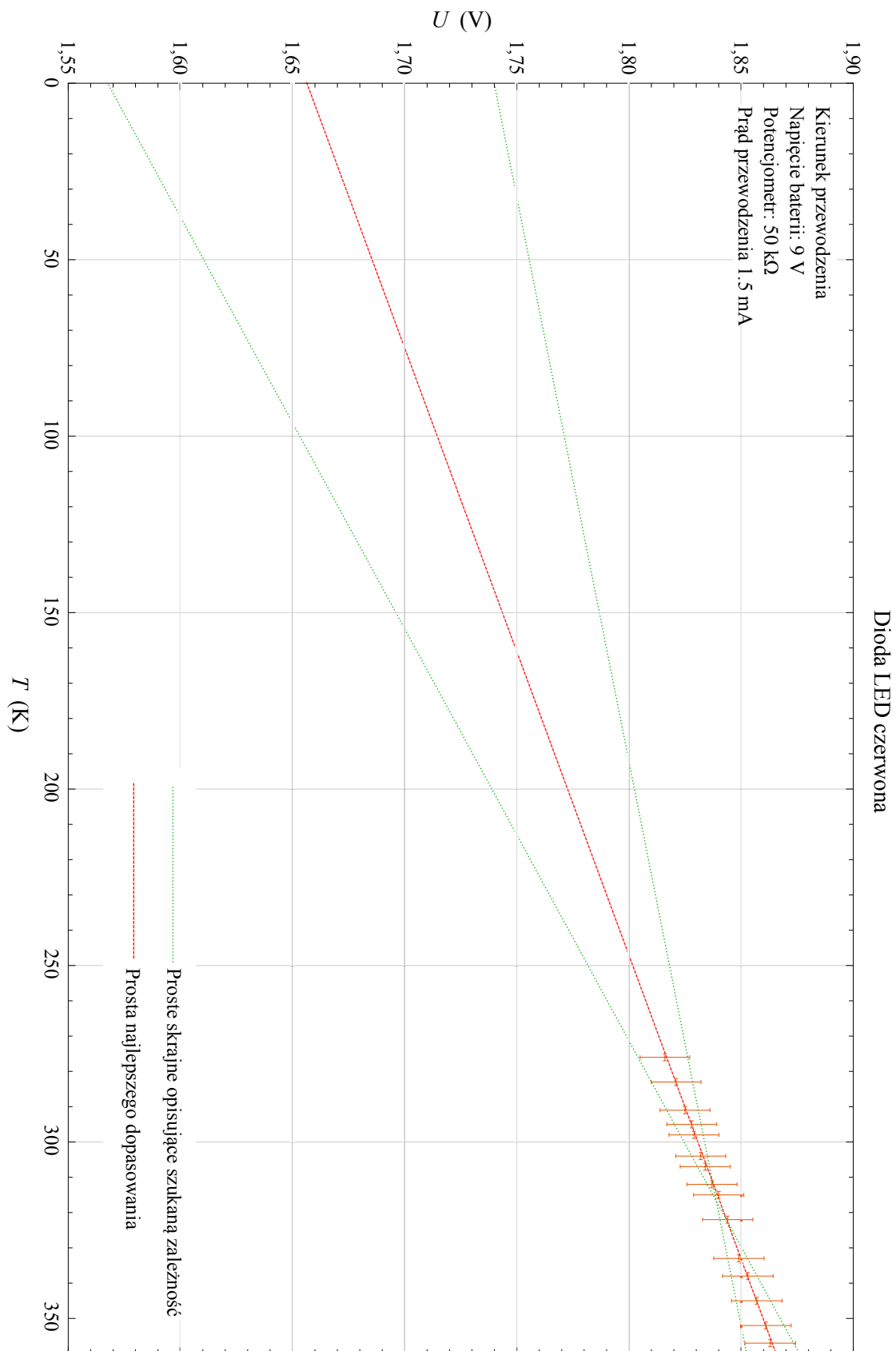
Tabela 2: Dane pomiarowe dla diody krzemowej

a zatem wprowadzać błąd do odczytu jej temperatury, która będzie wyższa od temperatury kąpieli wodnej. Dla wybranego natężenia prądu dokonujemy pomiaru napięcia na diodzie oraz jej temperatury. W kolejnym kroku dokonujemy zmiany temperatury poprzez dodanie pokruszonego drobno lodu bądź wrzątku. Należy pamiętać, aby każdorazowo mieszać wodę, by uzyskać tę samą temperaturę w całej objętości naczynia. Zmiana temperatury wywoła zmianę natężenia prądu. Aby powrócić do jego ustalonej wcześniej wartości, używamy potencjometru. Po tym kroku dokonujemy kolejnego pomiaru napięcia na diodzie oraz temperatury. Liczbę punktów pomiarowych dobieramy tak, aby obejmowały one możliwie szeroki zakres temperatury. Przykładowe wyniki uzyskane dla dwóch diod: diody 1N4007 MIC oraz diody LED o barwie czerwonej przedstawione są w poniższych tabelach oraz wykresach:

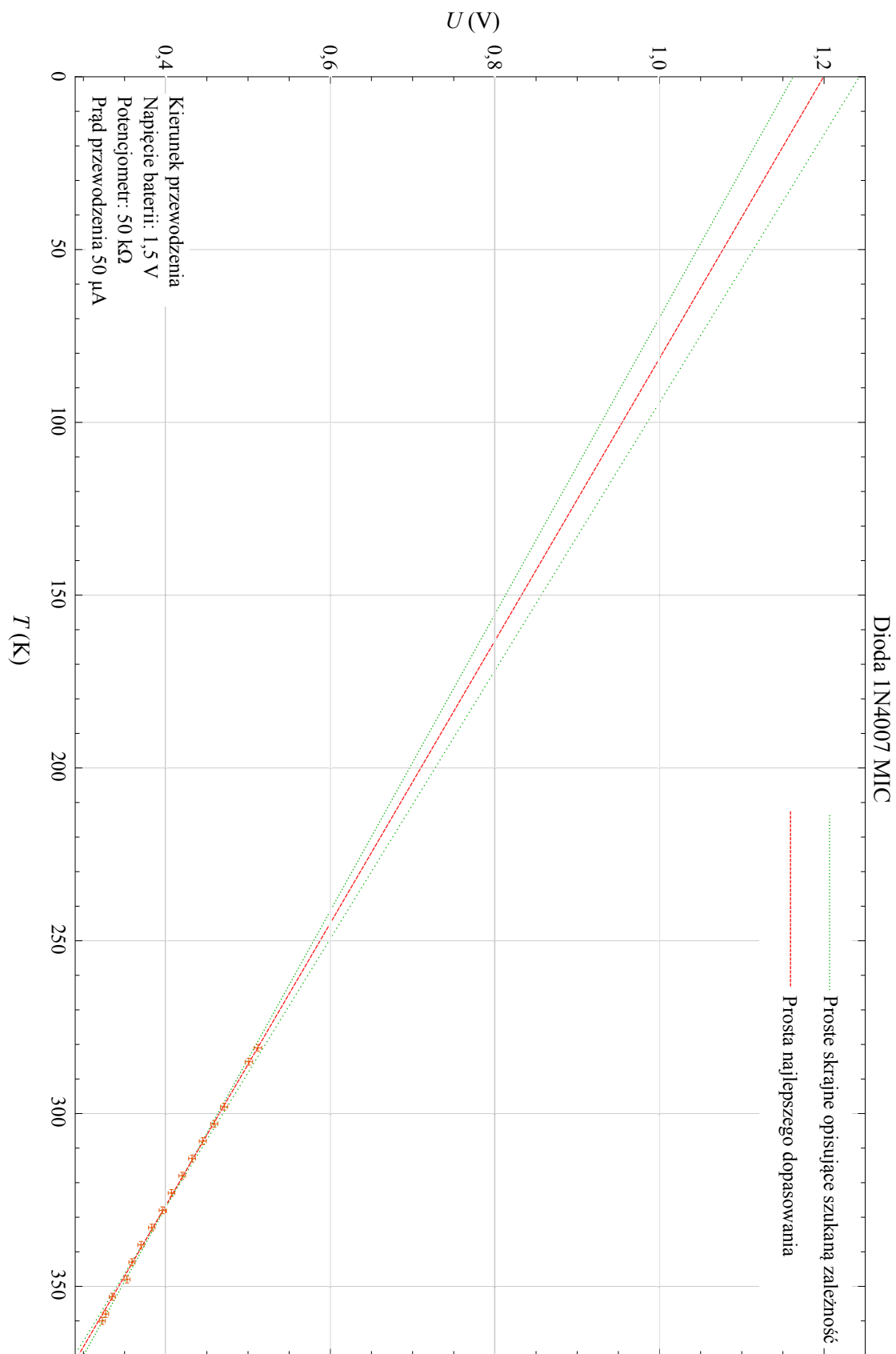
Na powyższych wykresach zaznaczono słupki błędów wynikające z niepewności metody pomiarowych. W przypadku pomiaru temperatury niepewność tę oszacowano na 1°C . Do pomiaru napięcia wykorzystano multimetr cyfrowy pracujący w zakresie do 2 V . W takim przypadku, zgodnie z instrukcją wartość niepewności pomiarowej napięcia U odczytana została z instrukcji i wynosi $0,5\%U + 0,002\text{V}$. Do punktów pomiarowych zostały dopasowane proste uwzględniające niepewności pomiarowe pojedynczych pomiarów. Prosta najlepiej dopasowana do punktów pomiarowych (zaznaczona czerwoną, przerywaną linią na wykresach) wykorzystana została do oszacowania szerokości przerwy E_g , natomiast skrajne proste, które można było dopasować do punktów pomiarowych (proste zielone), posłużyły do określenia niepewności pomiaru szerokości przerwy.

Z dopasowań do wykresów odczytano wartości przerwy energetycznej E_g dla diod 1N4007 MIC oraz diody LED czerwonej, które wynoszą odpowiednio $(1,20 \pm 0,05)\text{ eV}$ oraz $(1,66 \pm 0,08)\text{ eV}$.

Warto zwrócić uwagę, że dla sprawdzenia ewentualnego wpływu natężenia prądu na uzyskane wyniki należałoby wykonać pomiary przy różnej wartości prądu płynącego przez diodę.



Rysunek 6: Wykres zależności napięcia od temperatury dla diody LED czerwonej przy stałym natężeniu prądu.



Rysunek 7: Wykres zależności napięcia od temperatury dla diody 1N4007 MIC przy stałym natężeniu prądu.

Dla drugiej metody opisanej w części teoretycznej doświadczenie będzie prostsze ze względu na brak potrzeby utrzymania stałej wartości natężenia prądu.

Rozwiązując układ równań (36) dla wybranych zestawów wartości dla każdej z diod, również możemy wyznaczyć wartości E_g , które wynoszą dla diod LED i 1N4007 MIC odpowiednio $(1,65 \pm 0,07)$ eV oraz $(1,14 \pm 0,05)$ eV. Aby oszacować niepewność pomiaru w tym przypadku należy powtórzyć procedurę kilkakrotnie, a następnie przeanalizować rozkład wartości E_g .

Punktacja zadania D1.

Opis pomysłu doświadczenia umożliwiającego wyznaczenie szukanej wartości przerwy energetycznej E_g	5 pkt.
Zauważenie, że napięcie na diodzie można wyrazić jako funkcję liniową lub opis równażnego podejścia	3 pkt.
Opis układu eksperymentalnego	2 pkt.
Wykonanie pomiarów dla diody LED	1 pkt.
Wyznaczenie 6 lub większej ilości punktów eksperymentalnych dla diody LED	1 pkt.
Wykonanie pomiarów dla dla $\Delta t > 40^\circ\text{C}$ dla diody LED	1 pkt.
Wykonanie pomiarów dla $\Delta t \geq 90^\circ\text{C}$ dla diody LED	1 pkt.
Wykonanie pomiarów dla diody krzemowej	1 pkt.
Wyznaczenie 6 lub większej ilości punktów eksperymentalnych dla diody krzemowej ..	1 pkt.
Wykonanie pomiarów dla dla $\Delta t > 40^\circ\text{C}$ dla diody krzemowej	1 pkt.
Wykonanie pomiarów dla $\Delta t \geq 90^\circ\text{C}$ dla diody krzemowej	1 pkt.
Wyznaczenie E_g wraz z dyskusją niepewności wyniku	2 pkt.

Rozwiązanie zadania D2.

Część teoretyczna.

Dla stojącej fali poprzecznej w strunie prawdziwy jest wzór opisujący prędkość rozchodzenia się fali v :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad (37)$$

gdzie:

F - siła naciągu struny,

μ - gęstość liniowa.

Warto zauważyć, że prędkość ta jest niezależna od częstotliwości drgań. Końce struny gitarowej są nieruchome, zatem w strunie mieści się całkowita liczba połówek długości fali:

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad (38)$$

gdzie:

λ - długość fali,

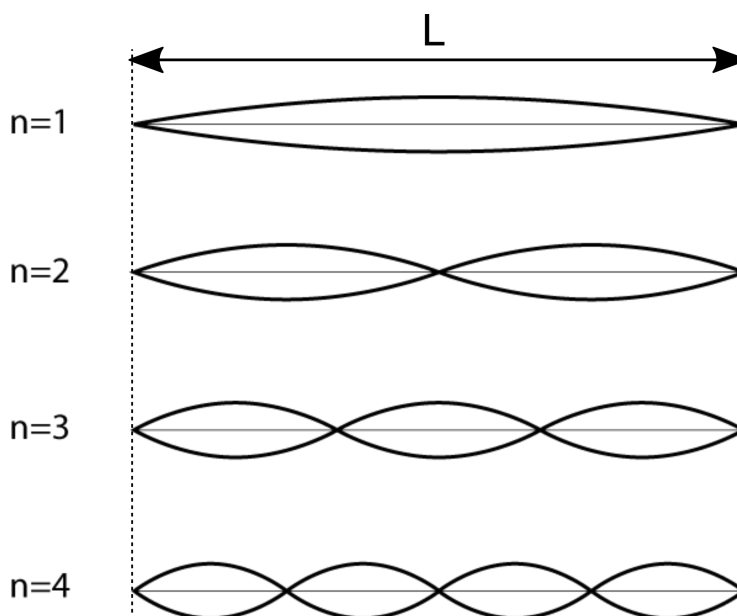
L - długość struny gitary,

n - liczba naturalna.

Łącząc wzory (37) i (38), otrzymujemy zależność częstotliwości drgań struny gitarowej od siły naciągu i gęstości liniowej struny:

$$f_n = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (39)$$

Przykładowe drgania w strunie, dla różnych wartości n , przedstawia schematycznie poniższy rysunek:

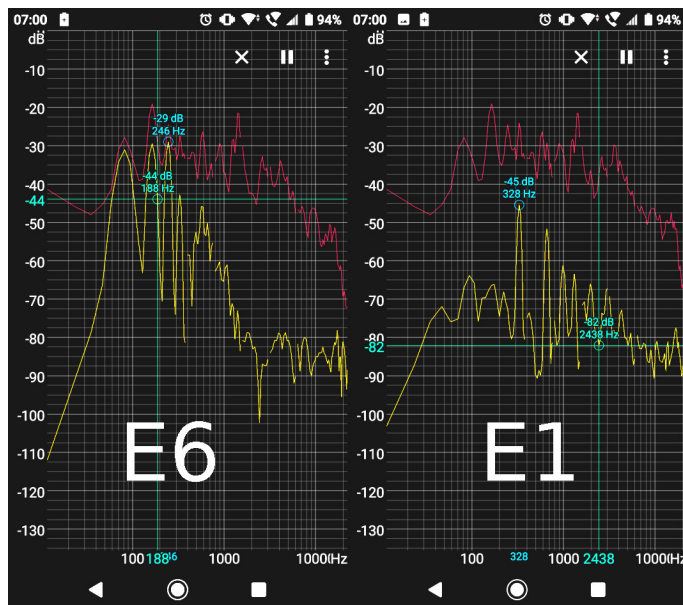


Rysunek 8: Drgania dla struny gitary dla różnych wartości n

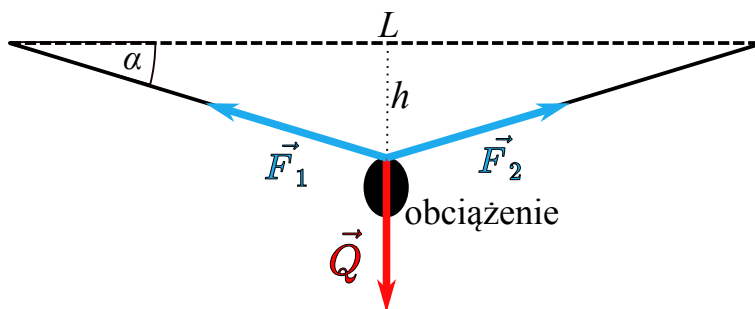
Analizując widmo dźwięku (na przykład za pomocą aplikacji w telefonie lub na komputerze) można zauważyć, że struna wykonuje jednocześnie szereg drgań o różnych częstotliwościach w tym samym czasie. Na wykresach poniżej widać różne częstotliwości drgań strun stalowych $E6$ (częstotliwość podstawowa dla standardowego strojenia 82,41 Hz) oraz $E1$ (częstotliwość podstawowa dla standardowego strojenia 329,6 Hz) pokazane za pomocą darmowej aplikacji Spectroid dostępnej na telefonach z systemem operacyjnym Android.

Dla rozwiązania zadania ważne jest odczytanie częstotliwości drgań struny odpowiadającej drganiu o znanej wartości liczby n – np. najniższej częstotliwości drgań struny dla $n = 1$. Dla struny $E6$ aplikacja wyznaczyła częstotliwość trzeciego wyraźnego maksimum ($n = 3$) na 246 Hz, zatem częstotliwość dla $n = 1$ to 82 Hz, natomiast dla struny $E1$ aplikacja podała wartość dla pierwszego maksimum ($n = 1$) równą 328 Hz.

Siłę naciągu struny można wyznaczyć zawieszając na niej dostępne obciążniki i mierząc jej odchylenie od początkowego położenia. Umieszczanie obciążenia o masie m na środku długości struny gitary powoduje jej wygięcie, co przedstawione jest schematycznie na rys. 10.



Rysunek 9: Widmo drgań strun stalowych $E6$ oraz $E1$ gitary akustycznej. Widma wyznaczone za pomocą darmowej aplikacji Spectroid dostępnej na telefonach z systemem operacyjnym Android.



Rysunek 10: Rozkład sił w obciążonej strunie.

Jeśli rozważymy punkt znajdujący się dokładnie w połowie struny, wtedy siły naciągu \vec{F}_1 i \vec{F}_2 będą równe co do wartości $F = F_0 + k\Delta L$, gdzie F_0 jest wartością siły bez dołożonego obciążenia, a ΔL wydłużeniem struny. Po przyłożeniu ciężaru zauważymy, że struna się wychyliła, a jej wychylenie można opisać wartością kąta α . Składowe wspomnianych sił równoległe do kierunku niewychylonej struny będą się równoważyć, składowa prostopadła będzie natomiast równoważona przez ciężar obciążenia. Możemy zatem zapisać:

$$mg = 2(F_0 + k\Delta L) \sin(\alpha), \quad (40)$$

gdzie:

- m - masa obciążników,
- g - przyspieszenie grawitacyjne,
- k - stała sprężystości struny,
- ΔL - zmiana długości struny.

Oznaczając przez h - wysokość, o jaką wydłużyła się struna, możemy zauważyć, że:

$$\sin(\alpha) = \frac{2h}{L}, \quad (41)$$

$$\Delta L = 2 \left(\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2} \right) - L = L \left(\sqrt{1 + \frac{4h^2}{L^2}} \right) - L. \quad (42)$$

Powyższe wyrażenie można przybliżyć korzystając z tego, że dla małych x : $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, zatem:

$$\Delta L \approx \frac{2h^2}{L}. \quad (43)$$

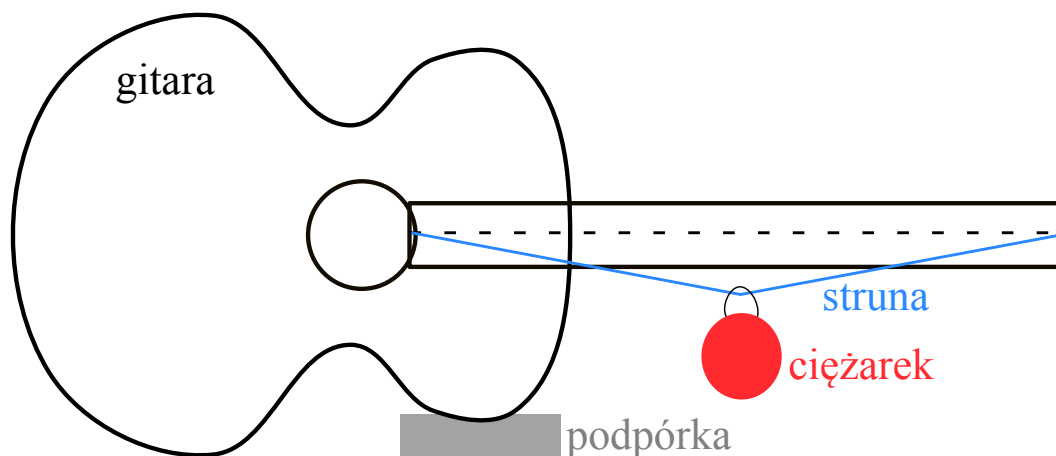
Podstawiając wyrażenia (41) i (43) do (40) i dzieląc obie strony przez $2 \sin(\alpha) = \frac{4h}{L}$, otrzymujemy:

$$\frac{mgL}{4h} = F_0 + k \frac{2h^2}{L}. \quad (44)$$

Wyrażenie (44) ma postać funkcji liniowej $y = F + kx$. Aby znaleźć wartości siły naciągu struny F_0 należy wyznaczyć wartości wyrażen $y = \frac{mgL}{4h}$ oraz $x = \frac{2h^2}{L}$ dla różnych obciążeń struny, co umożliwi dopasowanie prostej. Znając siłę naciągu, możemy skorzystać z równania (39) by wyznaczyć wartość gęstości liniowej struny μ .

Część doświadczalna.

Pomiary wykonano, opierając gitarę na boku za pomocą krzesła i książek, a do jej gryfu za pomocą taśmy klejącej przyklejono kawałek kartki, mniej więcej na środku długości. Następnie, za pomocą aplikacji na telefon nastrojono gitarę tak, że częstotliwości strun $E6$ oraz $E1$ wynosiły odpowiednio 82,41 Hz oraz 329,6 Hz. Woreczek foliowy za pomocą spinacza wieszano na kolejnych strunach i dla każdej ze strun zaznaczano długopisem na kartce wychylenie struny pod wpływem obciążników o masie 50 g, stopniowo zwiększając obciążenie od jednego do siedmiu ciężarków.

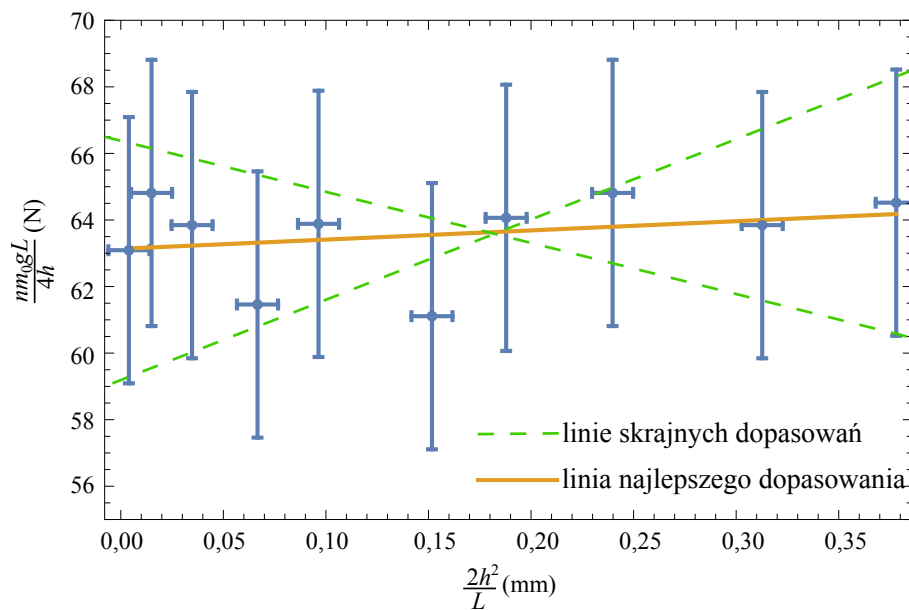


Rysunek 11: Schemat układu eksperymentalnego

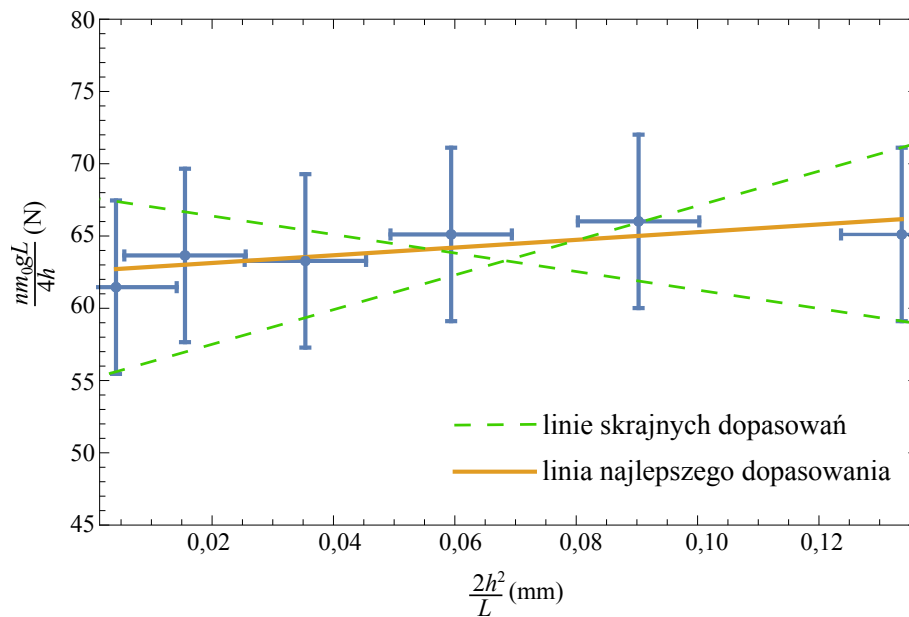
Wyniki dla strun $E6$ i $E1$ zebrano w poniższych tabelach 3 i 4.

Zebrane dane umieszczono na wykresach, tak aby móc dopasować do punktów pomiarowych zależność liniową.

Na wykresach widoczne są dopasowane zależności liniowe typu $ax + b$. Siła naciągu jest równa wyrazowi wolnemu b dopasowanych prostych i wynosi $(63,1 \pm 0,8)$ N dla struny $E6$ oraz $(62,6 \pm 0,8)$ N dla struny $E1$.



Rysunek 12: Wyniki pomiarów zależności (8) dla struny E6.



Rysunek 13: Wyniki pomiarów zależności (8) dla struny E1.

m (g)	h (mm)	$\frac{2h^2}{L}$ (mm)	$\frac{nm_0gL}{4h}$ (N)
45	1,0	0,004	61,4
90	2,0	0,015	63,6
135	3,5	0,035	63,2
180	4,5	0,059	65,1
225	4,5	0,090	66,0
270	6,5	0,133	65,1

Tabela 3: Wyniki pomiarów struny $E6$

m (g)	h (mm)	$\frac{2h^2}{L}$ (mm)	$\frac{nm_0gL}{4h}$ (N)
45	1,0	0,003	63,0
90	2,0	0,014	64,8
135	3,5	0,034	63,8
180	4,5	0,066	61,4
225	5,5	0,096	63,8
270	7,0	0,151	61,1
315	8,0	0,187	64,0
360	9,0	0,239	64,8
405	10,0	0,312	63,8
450	11,0	0,378	64,5

Tabela 4: Wyniki pomiarów struny $E1$

Niepewności pomiarowe oszacowano na podstawie niedokładności pomiarowych związanych z oszacowaniem wysokości odchylenia struny. Niedokładność ta oszacowano na 0,5 mm. Inne źródła niedokładności zostały pominięte. Po wyznaczeniu słupków błędów do punktów dopasowano proste, przy czym do oszacowania niepewności pomiaru siły naciągu posłużyły proste o maksymalnych wartościach nachylenia (zaznaczonych na wykresach zielonymi, przerywanymi liniami).

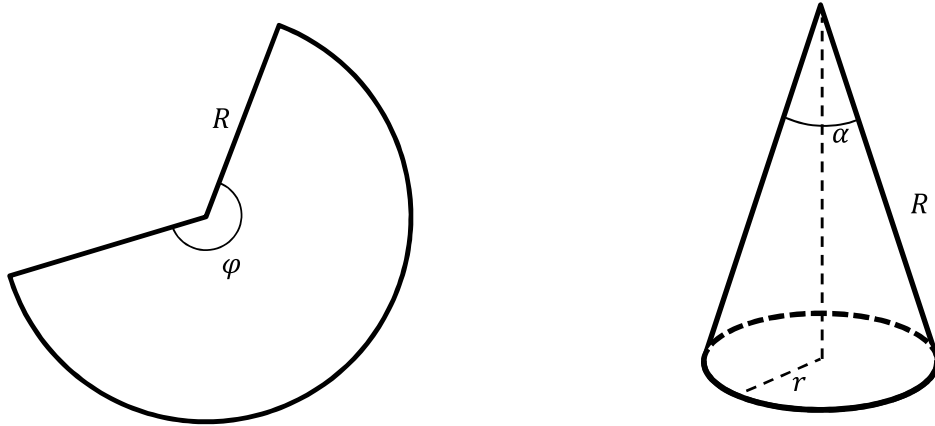
Znając wartości siły naciągu i korzystając z równania (39) możemy wyznaczyć drugą z szukanych wielkości – gęstość liniową strun. W pierwszym przypadku (struna $E6$) wynosi ona $(5,6 \pm 0,2)$ g/m, a dla struny $E1$ - $(0,34 \pm 0,01)$ g/m.

Punktacja zadania D2.

Opis konstrukcji układu pomiarowego umożliwiającego przyłożenie ciężaru do strun	.2 pkt
Wyznaczenie zależności wychylenia struny od obciążenia i początkowej siły naciągu – zależność (44) – lub równoważnej	3 pkt
Wyznaczenie gęstości liniowej struny (39) bądź równoważnej	3 pkt
Określenie częstotliwości drgań strun	2 pkt
Wykonanie pomiarów wychylenia strun $E6$ oraz $E1$ dla różnych obciążeń	2 pkt
Wykonanie co najmniej trzech serii pomiarów	1 pkt
Wykreślenie zależności umożliwiających znalezienie siły naciągu lub równoważna analiza	2 pkt
Wyznaczenie wartości siły naciągu strun wraz z niepewnością pomiarową	2 pkt
Wyznaczenie gęstości liniowej strun wraz z niepewnością pomiarową	2 pkt
Dyskusja niepewności pomiarowych	1 pkt

Rozwiązanie zadania D3.Część teoretyczna.

Badamy ruch stożka z papieru o kącie rozwarcia α , wykonanego z papieru. Powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła o promieniu R , stanowiącym jednocześnie tworzącą stożka (Rysunek 14).



Rysunek 14: Podstawowe wielkości charakteryzujące badany stożek

Wiemy, że

$$\sin \alpha = \frac{r}{R}. \quad (45)$$

Z kolei kąt wewnętrzny wycinka koła wynosi φ i jest równy

$$\varphi = \frac{2\pi r}{R} = 2\pi \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (46)$$

Masa powierzchni bocznej stożka jest równa

$$m = \frac{1}{2}R^2\varphi\sigma = \pi R^2\sigma \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (47)$$

gdzie σ to gęstość powierzchniowa (gramatura) papieru.

Zgodnie z treścią zadania przyjmujemy, że siła oporu ruchu stożka jest równa

$$F = \frac{C\rho S v^2}{2}, \quad (48)$$

gdzie pole przekroju prostopadłego do kierunku ruchu jest równe $S = \pi r^2$.

Stożek będzie poruszał się z prędkością graniczną v_{gr} , gdy siła grawitacji jest równoważona przez siłę oporu

$$mg = \frac{C\rho S v^2}{2}. \quad (49)$$

Stąd

$$C = \frac{2mg}{\rho S v_{\text{gr}}^2} = \frac{2g\pi R^2\sigma \sin \frac{\alpha}{2}}{\rho\pi r^2 v_{\text{gr}}^2} = \frac{2g\sigma}{\rho v_{\text{gr}}^2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (50)$$

Zatem wyznaczenie współczynnika oporu C sprowadza się do wyznaczenia prędkości granicznej ruchu spadającego stożka o określonym kącie rozwarcia.

Część doświadczalna.

Promień R należy tak dobrać, aby cały wycinek można było wykonać z jednej kartki papieru A4. W rozwiązaniu przygotowanym przez komitet stożki wykonano z kartki papieru A4 o gramaturze $\sigma = 80 \frac{\text{g}}{\text{m}^2}$. Powierzchnię boczną stożka wycięto z wykreślonego cyrklem okręgu o promieniu $R = 10,5$ cm. Następnie obliczono, że dla kątów rozwarcia stożka $\alpha = 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ kąt wycinka wynosi odpowiednio $\varphi = 138^\circ, 180^\circ, 255^\circ$, z dokładnością do 1° . Korzystając z taśmy mierniczej i kredy, wyznaczono na ścianie podziałkę co 10 cm, a następnie z wysokości około 2,3 m spuszczano wzdłuż podziałki pięciokrotnie każdy ze stożków. Ruch stożka był rejestrowany za pomocą kamery w telefonie komórkowym z prędkością 30 klatek na sekundę. Po zarejestrowaniu filmu wyskalowano rozmiar klatki w oprogramowaniu Tracker (wykorzystano do tego narysowaną podziałkę) i przeprowadzono procedurę śledzenia czubka stożka. W wyniku tej procedury wyznaczono położenia wierzchołka stożka jako funkcji czasu $y_i = y(t_i)$. Po osiągnięciu prędkości granicznej zależność położenia od czasu staje się liniowa. Do tego przedziału można dopasować prostą o równaniu $y = v_{\text{gr}}t + y_0$ i, w szczególności, wartość współczynnika kierunkowego tej prostej – prędkość v_{gr} , a następnie wyznaczyć wartość współczynnika C . Pomiar prędkości granicznej powtórzono trzykrotnie. Niepewność dopasowania prostej jest dużo mniejsza niż rozrzut wartości v_{gr} , w związku z czym niepewność Δv_{gr} (a następnie ΔC) wyznaczono jako największą różnicę między wartością średnią a zmierzoną wartością.

Równoważnie można wyznaczyć prędkość ruchu stożka jako iloraz drogi pokonanej przez wierzchołek pomiędzy dwiema klatkami filmu

$$v(t_i) = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t}, \quad (51)$$

gdzie Δt to czas pomiędzy klatkami filmu.

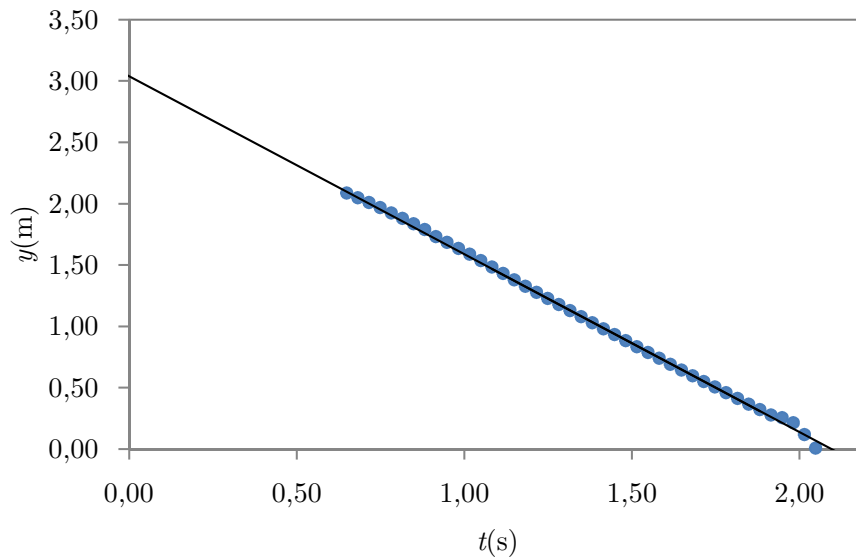
Przykładowy wykres zależności położenia od czasu oraz prędkości od czasu dla kąta rozwarcia stożka zaprezentowano poniżej:

kąt α	45°	60°	90°
1	2,61	2,14	1,46
2	2,75	2,09	1,42
3	2,69	2,23	1,49
średnia	2,68	2,15	1,46
niepewność	0,07	0,08	0,04

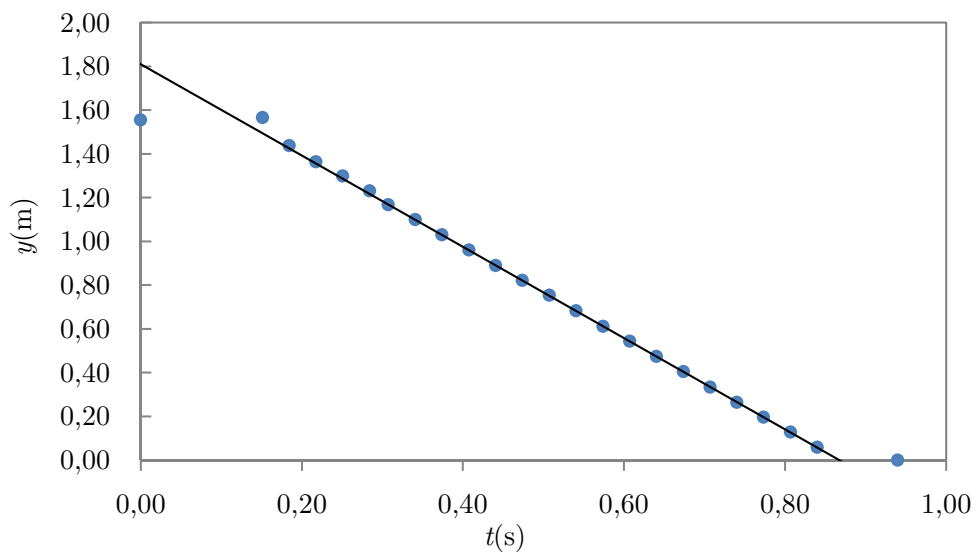
Tabela 5: Wyniki pomiarów prędkości granicznej v_{gr}

kąt α	45°	60°	90°
średnia	0,156	0,24	0,53
niepewność	0,008	0,02	0,03

Tabela 6: Wyznaczone współczynniki oporu aerodynamicznego C



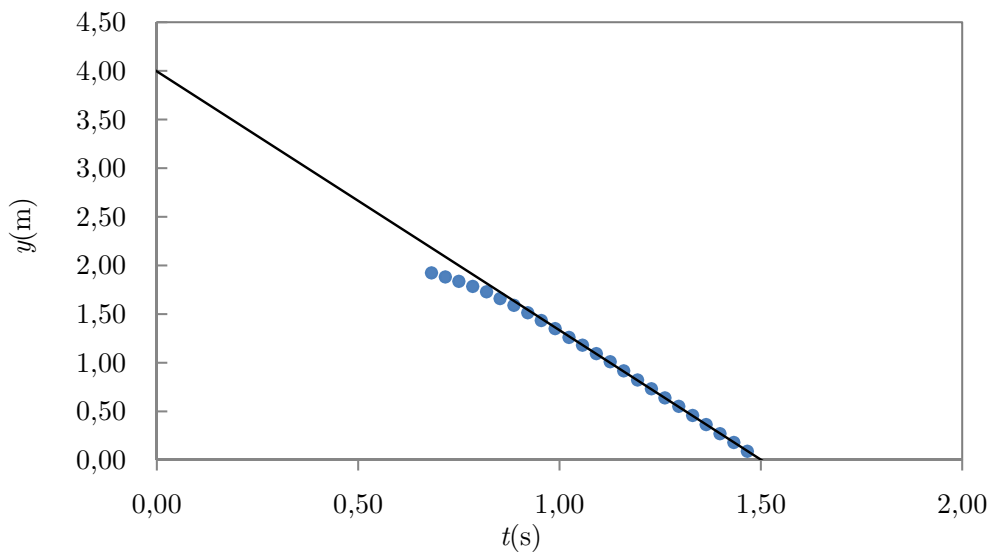
Rysunek 15: Zależność od czasu położenia wierzchołka stożka o kącie rozwarcia 90°



Rysunek 16: Zależność od czasu położenia wierzchołka stożka o kącie rozwarcia 60°

Punktacja zadania D3.

- Pomysł na przeprowadzenie pomiaru 3 pkt
- Opis wykonania stożka opisanego w zadaniu 2 pkt
- Zauważenie że stożek porusza się z prędkością graniczną, gdy przyspieszenie jest równe zero 1 pkt
- Wyprowadzenie wzoru 50 na współczynnik C 4 pkt



Rysunek 17: Zależność od czasu położenia wierzchołka stożka o kącie rozwarcia 45°

- Wykonanie pomiaru dla każdego z trzech badanych stożków 1 pkt
- Co najmniej trzykrotne powtórzenie pomiaru dla każdego z badanych stożków 1 pkt
- Zarejestrowanie zależności położenia stożka od czasu za pomocą programu Tracker
bądź innego programu pozwalającego na poklatkowe oglądanie filmu 2 pkt
- Zauważenie, że od pewnego momentu zależność położenia od czasu jest liniowa, oraz
wyznaczenie prędkości v_{gr} i jej niepewności 3 pkt
- Wyznaczenie wartości stałych C spełniających warunek $C_{45} < C_{60} < C_{90}$ wraz z nie-
pewnościami 3 pkt