

# LXX OLIMPIADA FIZYCZNA

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA

### CZĘŚĆ II

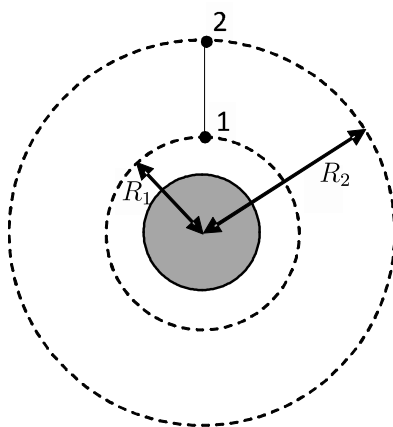
ZADANIA CZĘŚCI II (termin wysyłania rozwiązań — 13 listopada 2020 r.)

#### ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

##### Zadanie T1.

Dwa satelity 1 i 2 powiązane długą i lekką linką krążą wokół Ziemi po orbitach kołowych tak, że linka stale leży na prostej przechodzącej przez środek Ziemi (patrz rys.). Masy satelitów są równe  $m_1$  i  $m_2$ , a promienie orbit –  $R_1$  i  $R_2$ .



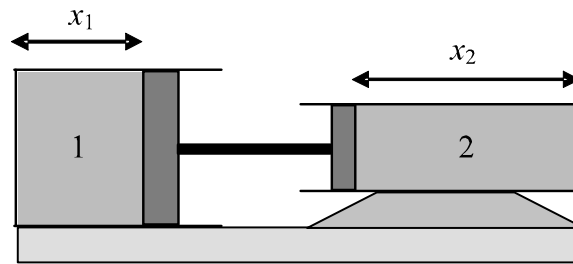
Oblicz okres  $T$  ich obiegu wokół Ziemi oraz siłę  $N$  napięcia linki.

Z jednego z satelitów bardzo powoli wciągano linkę, tak, że każdy z satelitów ciągle poruszał się po orbicie (w przybliżeniu) kołowej. Satelity zbliżyły się do siebie i połączyły. Oblicz promień  $R$  ich wspólnej orbity kołowej.

Dana jest masa Ziemi  $M$ . Pomiń wzajemne oddziaływanie grawitacyjne satelitów.

Podaj wyniki liczbowe w przypadku  $m_1 = m_2 = 500$  kg,  $R_1 = 7000$  km,  $R_2 = 20000$  km.

Masa Ziemi  $M = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg, uniwersalna stała grawitacyjna  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ .

**Zadanie T2.**

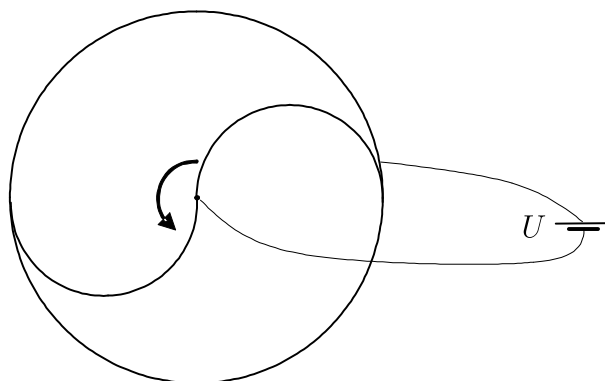
Dwa przymocowane do wspólnej podstawy cylindry z gazem doskonałym o ciepłe molowym  $c_V$  są szczelnie zamknięte tłokami połączonymi sztywno ze sobą (patrz rys.). Zespół tłoków może się przesuwać bez tarcia, a początkowa temperatura gazu  $T_p$  w obu cylindrach jest jednakowa. Powierzchnie tłoków wynoszą  $S_1$  i  $S_2$ , przy czym  $S_1 > S_2$ , a ciśnienie zewnętrzne jest równe  $p_{\text{atm}}$ . W obu cylindrach jest tyle samo moli gazu.

Oznaczmy przez  $x_1$  odległość, na jaką tłok w pierwszym cylindrze jest w danej chwili odsunięty od jego dna, a przez  $x_2$  odległość, na jaką tłok w drugim cylindrze jest w danej chwili odsunięty od jego dna; suma tych odległości jest stała i wynosi  $l$ :  $x_1 + x_2 = l$ . W stanie początkowym (gdy temperatura w obu cylindrach jest równa  $T_p$ ) te odległości były równe  $x_1 = \frac{1}{3}l$ ,  $x_2 = \frac{2}{3}l$ , przy czym układ był w stanie równowagi. Gaz w obu cylindrach powoli podgrzano do temperatury  $T_k = \frac{3}{2}T_p$ .

O jaką odległość i w którą stronę przesunęły się tłoki?

**Zadanie T3.**

Drut o długości  $\pi r$  został wygięty tak, że każda jego połowa ma kształt półokręgu o promieniu  $r/2$  – patrz rysunek. Drut jest zamocowany tak, że może swobodnie obracać się w swojej płaszczyźnie wokół swojego środka. Końce drutu ślizgają się po idealnie przewodzącym okręgu o promieniu  $r$ , a w trakcie tego ślizgania siła tarcia działająca na każdy z końców jest równa  $T$ . Cały układ znajduje się w stałym polu magnetycznym o indukcji  $B$ , prostopadłym do płaszczyzny w której leżą drut i okrąg. Opór elektryczny drutu między jego końcami wynosi  $R$ . Środek drutu oraz przewodzący okrąg podłączono do baterii o napięciu  $U$ . Wyznacz prędkość kątową  $\omega$ , z jaką drut będzie się obracał po długim czasie.



**Zadanie T4 - numeryczne.**

Gumka o stałej sprężystości  $k$  i długości swobodnej  $l_0$  jest rozpięta między odległymi od siebie o  $d$  dwoma punktami znajdującymi się na tej samej wysokości. Na gumce, w połowie jej długości, zawieszono ciężarek o masie  $m$  i go puszczono (w chwili początkowej gumka była pozioma, a prędkość ciężarka – równa zero). Pomiń masę gumki oraz straty energii. Przyspieszenie ziemskie  $g$  jest równe  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

Z dokładnością  $0,01 \text{ s}$  wyznacz numerycznie okres drgań ciężarka  $T$  w następujących przypadkach:

- a)  $k = 70 \text{ N/m}$ ,  $m = 0,70 \text{ kg}$ ,  $l_0 = d = 0,70 \text{ m}$ ;
- b)  $k = 280 \text{ N/m}$ ,  $m = 0,70 \text{ kg}$ ,  $l_0 = d = 0,70 \text{ m}$ ;
- c)  $k = 70 \text{ N/m}$ ,  $m = 0,70 \text{ kg}$ ,  $l_0 = 0,70 \text{ m}$ ,  $d = 1,70 \text{ m}$ .

Uwaga:

Rozwiązanie powinno zawierać: wzory używane w rozwiązaniu (wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem), opis zastosowanego algorytmu, opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz ze sposobem, zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników, oraz wyniki numeryczne.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub korzystanie z gotowych programów rozwiązujących numerycznie równania różniczkowe, znajdujących pochodne, minima lub maksima, obliczających numerycznie całki, programów wyznaczających tor lub ruch automatycznie po podaniu wzoru na siłę itp.

Preferowane jest wykorzystanie języków programowania typu C, Python, Pascal, Java, VBA (bez korzystania z pakietów numerycznych) lub arkuszy kalkulacyjnych.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

## ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Należy przesłać rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde z zadań doświadczalnych można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

## Zadanie D1.

Masz do dyspozycji:

- walcowy magnes neodymowy,
- kompas z podziałką kątową,
- niemagnetyczną linijkę lub krawiecką taśmę mierniczą,
- taśmę klejącą.

Przyjmij, że wartość indukcji magnetycznej magnesu mierzonej wzdłuż jego osi, dla odległości znacznie większych od jego rozmiarów, spełnia zależność potęgową:

$$B(r) = B_{10} \cdot \left(\frac{r}{r_{10}}\right)^a,$$

gdzie:

$r$  – odległość od środka magnesu,

$B_{10}$  – wartość indukcji w odległości 10 cm od magnesu,

$r_{10} = 10$  cm.

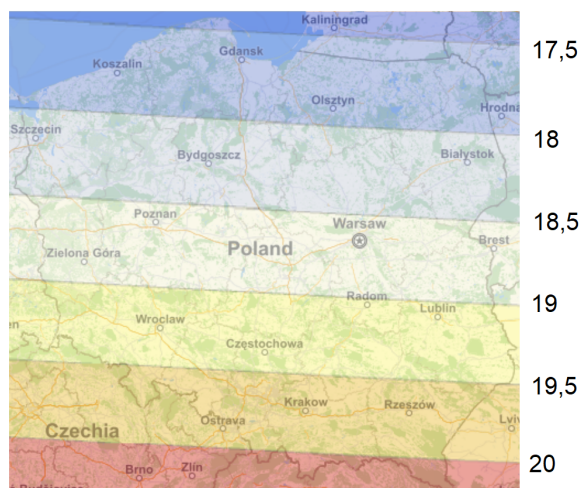
Wyznacz wartości parametru  $B_{10}$  oraz wykładnika  $a$ . Wartość poziomej składowej indukcji ziemskiego pola magnetycznego odczytaj z załączonej mapy.

Uwaga: Doświadczenie wykonaj z dala od innych magnesów oraz przedmiotów z materiałów ferromagnetycznych (na przykład kaloryfera lub stalowych elementów konstrukcji blatu, na którym pracujesz).

## Zadanie D2.

Masz do dyspozycji:

- smartfon z aplikacją pozwalającą generować dźwięk o zadanej częstotliwości,
- tekturę,
- linijkę,



Wartość składowej poziomej indukcji ziemskiego pola magnetycznego (μT)

Dane pochodzą z: *World Magnetic Model*,  
[ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/](http://ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/)

- taśmę klejącą,
- nóż lub nożyczki,
- worek na śmieci o pojemności 120 l,
- gazowy dwutlenek węgla.

Wyznacz prędkość dźwięku w powietrzu oraz w dwutlenku węgla.

Uwaga 1: Dwutlenek węgla uzyskaj z kwasu cytrynowego (najczęściej sprzedawanego pod nazwą „kwasek cytrynowy”) oraz z sody oczyszczonej, przeprowadzając reakcję chemiczną w roztworze wodnym. Przy użyciu 100 g kwasu cytrynowego (w postaci proszku) i 130 g sody oczyszczonej możesz uzyskać około 37 dm<sup>3</sup> gazu.

Uwaga 2: Możesz użyć elementów niewymienionych w treści zadania w celu przeprowadzenia reakcji i doprowadzenia dwutlenku węgla do układu pomiarowego.

### Zadanie D3.

Masz do dyspozycji:

- zwierciadło wklęsłe o ogniskowej w granicach od 15 cm do 60 cm (na przykład powiększające lustro kosmetyczne lub pokrywkę garnka, o kształcie zbliżonym do wycinka sfery),
- nierozcieńczony, przezroczysty (niekoniecznie bezbarwny) płyn do mycia naczyń,
- źródło światła umieszczone na wysokości około 2 m nad miejscem wykonania doświadczenia,
- taśmę mierniczą,
- kartkę papieru formatu A4.

Wyznacz współczynnik załamania światła badanego płynu do mycia naczyń. W rozwiązaniu podaj markę użytego płynu.

## ROZWIĄZANIA

### Rozwiązanie zadania T1

Ponieważ satelity poruszają się po okręgach, zatem równania dynamiki satelitów mają postać

$$m_1\omega^2 R_1 = \frac{GMm_1}{R_1^2} - N, \quad m_2\omega^2 R_2 = \frac{GMm_1}{R_2^2} + N, \quad (1)$$

gdzie  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T$  – szukany okres obiegu,  $M$  – masa Ziemi,  $G$  – uniwersalna stała grawitacyjna, natomiast  $N$  – szukana siła napięcia linki. Proste przekształcenia prowadzą do wyników

$$\omega = \sqrt{\frac{GM \left( \frac{m_1}{R_1^2} + \frac{m_2}{R_2^2} \right)}{m_1 R_1 + m_2 R_2}}, \quad (2)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 R_1 + m_2 R_2}{GM \left( \frac{m_1}{R_1^2} + \frac{m_2}{R_2^2} \right)}}, \quad (3)$$

$$N = \frac{GM m_1 m_2}{m_1 R_1 + m_2 R_2} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_1^2 R_2^2}. \quad (4)$$

Początkowy moment pędu układu względem środka Ziemi  $J_p$  jest równy

$$J_p = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \omega = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \sqrt{\frac{GM \left( \frac{m_1}{R_1^2} + \frac{m_2}{R_2^2} \right)}{m_1 R_1 + m_2 R_2}}. \quad (5)$$

W sytuacji końcowej mamy ciało o masie  $m_1 + m_2$  krążące po orbicie o promieniu  $R$ . Jego prędkość  $v$  wynosi

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (6)$$

zatem jego moment pędu względem środka Ziemi  $J_k$  jest równy

$$J_k = (m_1 + m_2) v R = (m_1 + m_2) \sqrt{GM R}. \quad (7)$$

Z zasady zachowania momentu pędu (przyrównania  $J_p$  do  $J_k$ ) otrzymamy

$$R = \frac{J_p^2}{(m_1 + m_2)^2 GM}, \quad (8)$$

co po uwzględnieniu wzoru (5) daje

$$R = \left( \frac{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\frac{m_1}{R_1^2} + \frac{m_2}{R_2^2}}{m_1 R_1 + m_2 R_2}. \quad (9)$$

W przypadku  $m_1 = m_2 = 500$  kg,  $R_1 = 7000$  km,  $R_2 = 20000$  km otrzymujemy  $R = 42,8 \cdot 10^3$  km,  $N = 2,88 \cdot 10^3$  N. Zauważmy, że dla tych danych zachodzi  $R > \max(R_1, R_2)$ . Co więcej, gdy  $R_2$  jest znacznie większe od  $R_1$ , końcowy promień  $R$  jest znacznie większy od  $R_2$ . Widać to np. stąd, że gdy  $R_2/R_1 \gg 1$ , wzór (9) przyjmuje postać

$$R = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 R_2. \quad (10)$$

## Rozwiązanie zadania T2

Oznaczmy przez  $p_1$  ciśnienie gazu w pierwszym cylindrze, a przez  $p_2$  ciśnienie gazu w drugim cylindrze. Działająca na układ tłoków wypadkowa siła pochodząca od tych ciśnień wynosi  $p_1 S_1 - p_2 S_2$ , przy czym dodatnia wartość oznacza siłę działającą od cylindra 1 do cylindra 2.

Przy tej konwencji znaku siły, wypadkowa siła pochodząca od ciśnienia atmosferycznego wynosi  $p_{\text{atm}}(S_2 - S_1)$ . Gdy układ jest w równowadze i nie działają żadne dodatkowe siły zewnętrzne, zachodzi

$$p_1 S_1 - p_2 S_2 + p_{\text{atm}}(S_2 - S_1) = 0. \quad (11)$$

Uwzględniając równanie stanu gazu doskonałego mamy

$$p_1 = \frac{nRT}{V_1}, \quad p_2 = \frac{nRT}{V_2}, \quad (12)$$

gdzie  $V_1 = x_1 S_1$ ,  $V_2 = x_2 S_2$  są objętościami gazu w odpowiednich cylindrach,  $n$  oraz  $T$  – odpowiednio liczbą moli oraz temperaturą w każdym z nich, a  $R$  jest uniwersalną stałą gazową. Z powyższych wzorów otrzymujemy, że gdy w temperaturze w cylindrach wynosi  $T$ , warunek równowagi jest następujący

$$RTn \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) = p_{\text{atm}}(S_1 - S_2). \quad (13)$$

Ponieważ  $p_{\text{atm}}$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $n$  (i oczywiście  $R$ ) są w rozpatrywanym zagadnieniu stałe, to

$$T_p \left( \frac{1}{x_{1p}} - \frac{1}{x_{2p}} \right) = T_k \left( \frac{1}{x_{1k}} - \frac{1}{x_{2k}} \right), \quad (14)$$

gdzie  $x_{1p} = \frac{1}{3}l$ ,  $x_{2p} = \frac{2}{3}l$  to wartości  $x_1$ ,  $x_2$  w stanie początkowym, natomiast  $x_{1k}$ ,  $x_{2k}$  to wartości  $x_1$ ,  $x_2$  w stanie końcowym. Po względnieniu, że  $T_k = \frac{3}{2}T_p$  oraz  $x_{2k} = l - x_{1k}$ , z powyższego równania wynika równanie kwadratowe na  $x_{1k}$ :

$$x_{1k}^2 - 3lx_{1k} + l^2 = 0. \quad (15)$$

Rozwiązaniem tego równania spełniającym ograniczenie fizyczne  $0 \leq x_{1k} \leq l$  jest

$$x_{1k} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}l. \quad (16)$$

Ponieważ  $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38 > \frac{1}{3}$ , tłoki przesunęły się od cylindra 1 w kierunku cylindra 2.

Zatem przesunięcie układu tłoków wynosi

$$x_{1k} - x_{1p} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{6}l. \quad (17)$$

czyli w przybliżeniu  $x_{1k} - x_{1p} \approx 0,05 l$ .

### Rozwiązanie zadania T3

Opór elektryczny jednego „ramienia” drutu, czyli połowy całego drutu, wynosi  $R/2$ , zatem przez takie jedno ramię płynie prąd o natężeniu

$$I = \frac{U + \mathcal{E}}{R/2}, \quad (18)$$

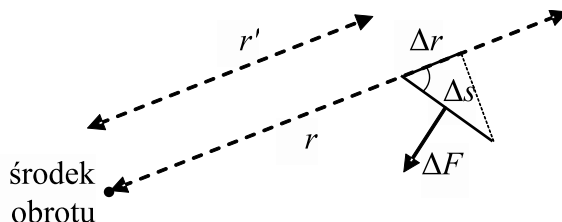
gdzie  $\mathcal{E}$  jest siłą elektromotoryczną, na podstawie prawa Faradaya równą

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (19)$$

W powyższym równaniu  $\Delta\Phi$  jest zmianą w ciągu (krótkiego) czasu  $\Delta t$  strumienia indukcji magnetycznej przechodzącego przez obwód zamknięty rozważanym ramieniem drutu. Przy obrocie o kąt pełny  $2\pi$  ramię zakreśla powierzchnię  $\pi r^2$ , zatem przy obrocie o kąt  $\omega\Delta t$ , czyli w ciągu czasu  $\Delta t$ , to ramię zakreśla powierzchnię  $\frac{1}{2}r^2\omega\Delta t$ . Ponieważ indukcja pola  $B$  jest stała, wynika stąd, że  $\Delta\Phi = \frac{1}{2}r^2B\omega\Delta t$ , a zatem

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2}r^2B\omega. \quad (20)$$

Rozważmy mały odcinek jednego z ramion drutu, znajdujący się w odległości od osi obrotu od  $r'$  do  $r'+\Delta r$ . Na taki odcinek działa siła elektrodynamiczna  $\Delta F = IB\Delta s$ , gdzie  $\Delta s$  jest długością tego odcinka. Rzut tej siły na kierunek prostopadły do promienia wynosi  $\Delta F_{\perp} = IB\Delta s \cos\alpha = IB\Delta r$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem między rozważanym odcinkiem a promieniem (patrz rysunek – kąt  $\alpha$  zaznaczono na nim małym łukiem).



Zatem pochodzący od rozważanego odcinka moment siły elektrodynamicznej względem osi obrotu jest równy  $\Delta M = IBr'\Delta r$ . Stąd wynika, że całkowity moment siły elektrodynamicznej działającej na jedno ramię wynosi

$$M = \frac{1}{2}IBr^2. \quad (21)$$

Powyższy wynik można otrzymać, zauważając, że  $\Delta M$  liniowo zależy od  $r'$ , a zatem  $M = IBr_{\text{śr}}r$ , gdzie  $r_{\text{śr}} = r/2$  jest średnią wartością  $r'$ .

Po długim czasie drut będzie obracał się jednostajnie, zatem moment siły elektrodynamicznej będzie równy momentowi siły tarcia  $Tr$ , czyli będzie zachodzić

$$2M = 2Tr, \quad (22)$$

Powyżej czynnik 2 wynika z uwzględnienia, że mamy dwa ramiona drutu.

Uwzględniając wzory (18, 20, 21) otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \frac{U - \frac{1}{2}\pi r^2 B\omega}{R/2} Br^2 = Tr, \quad (23)$$

a stąd

$$\omega = \frac{2}{Br^2} \left( U - \frac{TR}{Br} \right). \quad (24)$$

Powyższy wzór obowiązuje tylko, jeśli siła elektrodynamiczna jest w stanie pokonać siłę tarcia, czyli gdy  $U > \frac{TR}{Br}$ . W przeciwnym przypadku otrzymamy  $\omega = 0$ .

### Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)



## 1. Rozważania fizyczne

Oznaczmy przez  $x$  przesunięcie ciężarka w porównaniu z położeniem początkowym. Z twierdzenia Pitagorasa długość gumki  $l$  przy danym  $x$  jest równa

$$l = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (x)^2} = \sqrt{d^2 + 4x^2}, \quad (25)$$

Napięcie nici jest równe  $N = k(l - l_0)$ , zatem siła działająca na ciężarek jest równa

$$F = mg - 2\frac{x}{l/2}k(l - l_0). \quad (26)$$

Równania ruchu możemy zapisać następująco

$$\Delta x = v\Delta t, \quad (27)$$

$$\Delta v = a\Delta t, \quad (28)$$

$$a = \frac{F}{m}, \quad (29)$$

gdzie zakładamy, że zmiany położenia  $\Delta x$ , prędkości  $\Delta v$  oraz czasu  $\Delta t$  są bardzo małe.

## 2. Metoda numeryczna

Oznaczając przez  $x_i$ ,  $v_i$  oraz  $a_i$  wartości  $x$ ,  $v$  oraz  $a$  w kolejnych chwilach czasu  $t_i$  możemy zapisać najprostsze równania iteracyjne zgodne z powyższymi równaniami

$$x_{i+1} = x_i + v_i\Delta t, \quad (30)$$

$$a_i = F(x_i)/m, \quad (31)$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i\Delta t, \quad (32)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t, \quad (33)$$

gdzie  $\Delta t$  jest krokiem czasowym. Taka metoda (metoda Eulera) jest jednak mało dokładna; znacznie lepszą metodą jest metoda wykorzystująca położenie pośrednie  $x_{i+1/2}$  oraz przyspieszenie w położeniu pośrednim  $a_{i+1/2}$  (algorytm skokowy lub algorytm żabiego skoku):

$$x_{i+1/2} = x_i + v_i\frac{\Delta t}{2}, \quad (34)$$

$$a_{i+1/2} = F(x_{i+1/2})/m, \quad (35)$$

$$v_{i+1} = v_i + a_{i+1/2}\Delta t, \quad (36)$$

$$x_{i+1} = x_{i+1/2} + v_{i+1}\frac{\Delta t}{2}, \quad (37)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t. \quad (38)$$

To, że jest to metoda znacznie lepsza, najlepiej pokazuje fakt, że w przypadku stałej siły (a więc i stałego przyspieszenia) daje ona dokładne wyniki.

Do równań iteracyjnych musimy dodać również warunki początkowe; w rozważanym zagadnieniu są to warunki

$$x_1 = 0, \quad v_1 = 0. \quad (39)$$

Okres drgań można wyznaczyć na różne sposoby; można np. wykorzystać fakt, że w połowie okresu odchylenie ciężarka od położenia początkowego jest maksymalne tzn.  $T/2 = t_n$ , gdzie  $n$  odpowiada pierwszej maksymalnej wartości  $x$  (lub pierwszej zmianie znaku prędkości). Zauważmy, że przy tym sposobie wyznaczania okresu niepewność jego wartości jest nie mniejsza niż  $2\Delta t$ .

### 3. Implementacja metody numerycznej

Opisaną powyżej metodę numeryczną zaimplementowano wykorzystując arkusz kalkulacyjny, w którym poszczególne z równań (34 – 38) odpowiadają kolumnom arkusza, a ustalone  $i$  odpowiada jednemu wierszowi. W arkuszu znajdują się również kolumny odpowiadające wyznaczaniu  $l$  oraz  $F$  (równania (25) oraz (26)). Dodatkowo jest kolumna sprawdzająca, czy wartość  $x$  w danym wierszu jest większa niż  $x$  z poprzedniego wiersza. Czas odpowiadający pierwszemu wierszowi, po którym następuje zmniejszenie wartości  $x$  przyjęto za równy  $T/2$ .

Na stronie internetowej KGOF znajduje się również program w języku CPP wykorzystujący opisany algorytm.

### 4. Oszacowanie niepewności wyniku oraz sprawdzenie poprawności wyników

Niepewność dokładności otrzymanej wartości  $T$  przyjęto jako równą  $2\Delta t$ . Aby zagwarantować, że metoda numeryczna nie wprowadza dodatkowych błędów, obliczenie powtórzono dla  $\Delta t$  zmniejszonego 5 razy. Dodatkowo wykonano wykres zależności położenia od czasu w przeciągu kilku okresów, aby upewnić się, że otrzymany ruch jest rzeczywiście okresowy.

### 5. Wyniki numeryczne

W rozwiązaniu przyjęto krok czasowy  $\Delta t = 0,001$  s (przy sprawdzaniu dokładności krok zmniejszono do  $0,0002$  s).

Otrzymano (w nawiasie podano odchylenie ciężarka w połowie okresu, czyli w najniższym położeniu)

w przypadku a):  $T = 0,640$  s ( $x(T/2) = 0,322$  m);

w przypadku b):  $T = 0,483$  s ( $x(T/2) = 0,190$  m);

w przypadku c):  $T = 0,409$  s ( $x(T/2) = 0,083$  m).

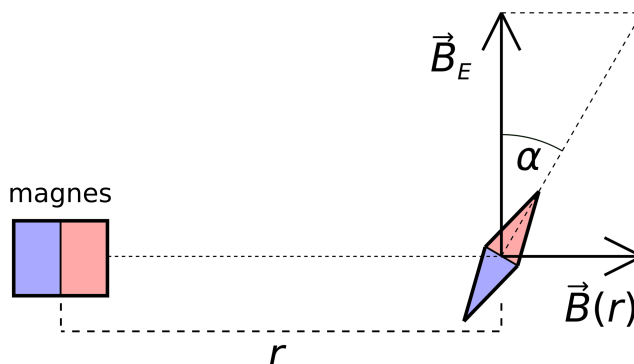
Niepewność wyznaczenia  $T$  wynosi  $0,002$  s.

## Rozwiązanie zadania D1

### Część teoretyczna

Igła kompasu ustawionego poziomo, przy braku innych źródeł pola magnetycznego, ustawi się zgodnie z kierunkiem składowej poziomej  $\vec{B}_E$  indukcji ziemskiego pola magnetycznego. Z symetrii wynika, że kierunek pola magnetycznego wytwarzanego przez walcowy magnes jest na jego osi równoległy do tej osi.

Jeśli magnes ustawimy tak, aby jego oś przechodziła przez środek igły kompasu oraz była skierowana poziomo, ale prostopadłe do kierunku składowej poziomej ziemskiego pola magnetycznego, wtedy na igłę będzie działało wypadkowe pole magnetyczne będące złożeniem dwóch prostopadłych składowych (Rys. 1). Tangens kąta  $\alpha$  (kąta wychylenia igły względem  $\vec{B}_E$ ) jest równy



Rysunek 1: Schemat układu pomiarowego.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B(r)}{B_E}, \quad (40)$$

a więc

$$B(r) = \operatorname{tg} \alpha \cdot B_E. \quad (41)$$

Uwzględniając równanie (41) oraz założoną w treści zadania zależność potęgową otrzymujemy

$$B(r) = \operatorname{tg} \alpha \cdot B_E = B_{10} \cdot \left(\frac{r}{r_{10}}\right)^a. \quad (42)$$

Logarytmujemy stronami:

$$\log(\operatorname{tg} \alpha) + \log(B_E) = \log(B_{10}) + a \cdot \log\left(\frac{r}{r_{10}}\right). \quad (43)$$

Przekształcamy do równania postaci  $y = a \cdot x + b$ :

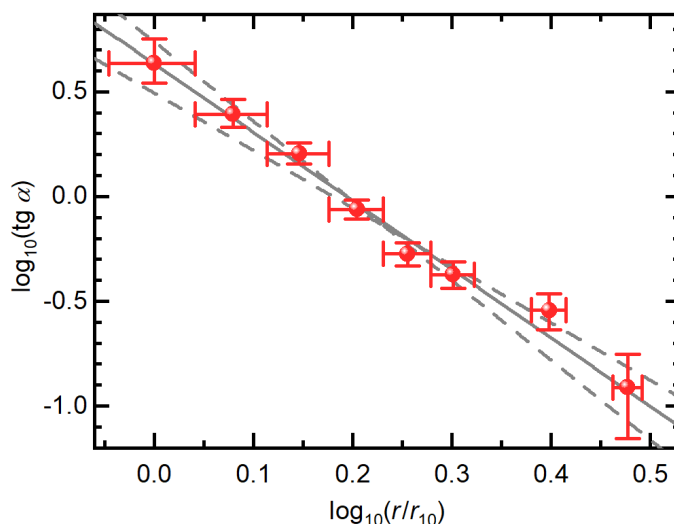
$$\log(\operatorname{tg} \alpha) = a \cdot \log\left(\frac{r}{r_{10}}\right) + \log\left(\frac{B_{10}}{B_E}\right), \quad (44)$$

gdzie za zmienną  $y$  przyjmujemy  $\log(\operatorname{tg} \alpha)$  natomiast za zmienną  $x$  przyjmujemy  $\log\left(\frac{r}{r_{10}}\right)$ . Parametry  $x$  i  $y$  będą wyznaczone na podstawie wyników pomiarów.

### Część doświadczalna

Kompas położono na pozycji zero taśmy mierniczej rozprostowanej na blacie stołu. Obudowę kompasu obrócono w taki sposób, aby igła pod wpływem ziemskiego pola magnetycznego wskazywała zero stopni na podziałce kompasu. Taśmę mierniczą pod kompasem ustawiono prostopadłe do kierunku wskazywanego przez igłę. Oś walcowego magnesu ustawiono poziomo, a następnie przyklejono go do powierzchni bocznej rolki taśmy klejącej, aby umożliwić stabilne ułożenie magnesu w dowolnej pozycji i orientacji.

Magnes ustawiano w kolejnych położeniach w odległościach  $r$  w zakresie od 10 cm do 30 cm od środka igły kompasu, a następnie odczytywano wychylenie igły. Składową poziomą pola magnetycznego dla Warszawy odczytano z mapy posługując się taśmą mierniczą, aby interpolować wartość pomiędzy kolejnymi liniami na mapie konturowej. Otrzymano wartość  $B_E = (18,6 \pm 0,1) \mu\text{T}$ . Niepewność określenia odległości  $r$  oszacowano na 1 cm. Niepewność ta wynika głównie z dużych rozmiarów igły kompasu. Niepewność określenia kąta wychylenia igły oszacowano na  $3^\circ$  na podstawie kilkukrotnego powtórzenia pomiaru w jednym punkcie. Zebrane pomiary przedstawiono na Rys. 4.



Rysunek 2: Wyniki pomiarów wraz z prostą najlepszego dopasowania oraz skrajnymi prostymi.

Niepewności punktów na osi poziomej uzyskano obliczając wartość wyrażenia dla odległości pomniejszonej i powiększonej o wartość niepewności, czyli 1 cm. Podobnie obliczono niepewności na osi pionowej związane z kątem  $\alpha$ .

Otrzymano następujące wartości parametrów dla prostej najlepszego dopasowania:

$$a = -3,27, \quad B_{10} = 80 \mu\text{T}$$

Zaniedbano niepewność wyznaczenia składowej poziomej ziemskiego pola magnetycznego, ponieważ jest ona stosunkowo niewielka. Następnie dopasowano proste o skrajnych nachyleniach nadal odpowiadających dobrze punktom pomiarowym. Uzyskano następujące wartości parametrów dla skrajnych prostych:

$$a^- = -2,76, \quad B_{10}^- = 59 \mu\text{T}$$

$$a^+ = -3,61, \quad B_{10}^+ = 103 \mu\text{T}$$

Na tej podstawie oszacowano niepewności otrzymanych parametrów i uzyskano ostateczny wynik:

$$a = -3,3 \pm 0,5 \text{ oraz } B_{10} = (80 \pm 20) \mu\text{T}.$$

### Komentarz 1

Wyznaczone wartości parametrów  $a$  oraz  $B_{10}$  możemy podstawić do założonej w treści zadania zależności potęgowej. Otrzymamy wzór pozwalający oszacować wartość indukcji pola magnetycznego

w dowolnej odległości od magnesu:

$$B(r) = 80 \mu\text{T} \cdot \left( \frac{r}{10 \text{ cm}} \right)^{-3,3}.$$

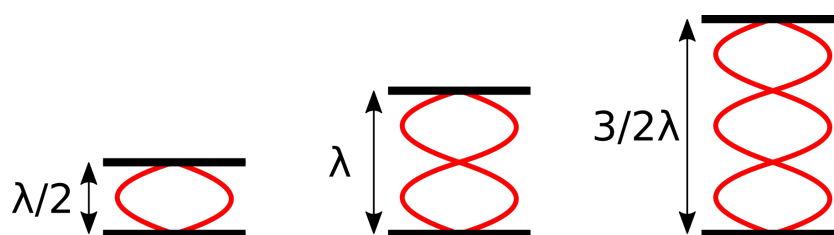
## Komentarz 2

Indukcję pola magnetycznego magnesu można przybliżyć indukcją  $\vec{B}(\vec{r})$  dipola magnetycznego ([https://pl.wikipedia.org/wiki/Magnetyczny\\_moment\\_dipolowy](https://pl.wikipedia.org/wiki/Magnetyczny_moment_dipolowy)). Takie przybliżenie jest słuszne dla odległości znacznie większych od rozmiarów magnesu. W takim przypadku wartość indukcji pola magnetycznego maleje odwrotnie proporcjonalnie do trzeciej potęgi odległości od magnesu, co odpowiada współczynnikowi  $a$  równemu  $-3$ .

## Rozwiązanie zadania D2

### Część teoretyczna

Pomysł rozwiązania zadania wykorzystuje zjawisko rezonansu akustycznego. Fala odbijająca się pomiędzy dwoma sztywnymi płaszczyznami interferuje konstruktywnie, gdy pokonana przez nią droga po pełnym obiegu wewnątrz jest wielokrotnością długości fali  $\lambda$  (Rys. 3).



Rysunek 3: Konstruktywna interferencja dźwięku zachodząca dla trzech najmniejszych odległości między płaszczyznami.

Oznacza to, że interferencja jest konstruktywna, gdy odległość między płaszczyznami jest równa

$$h = n \frac{\lambda}{2}, \quad (45)$$

gdzie  $n$  to dowolna dodatnia liczba całkowita. Jeżeli prędkość dźwięku w danym ośrodku wynosi  $c$ , to długość fali dźwiękowej o częstotliwości  $f$  wynosi

$$\lambda = \frac{c}{f}. \quad (46)$$

Dla ustalonej częstotliwości  $f$  otrzymujemy następujące wyrażenie na kolejne wysokości  $h$ , dla których zachodzi rezonans:

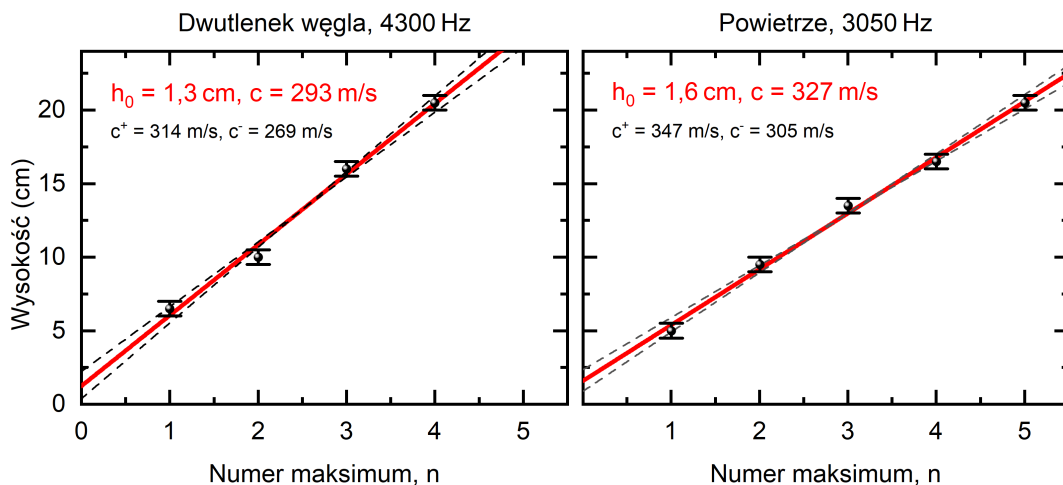
$$h = n \frac{c}{2f}. \quad (47)$$

### Część doświadczalna

Zjawisko rezonansu wykorzystano do zmierzenia prędkości dźwięku. W tym celu skonstruowano wnękę rezonansową kładąc smartfon na podłodze i trzymając nad nim wycięty z tektury

kwadratowy arkusz o boku około (30–40) cm. Podnosząc i opuszczając arkusz tektury szukano położeń odpowiadających kolejnym rezonansom, nasłuchując maksimum głośności emitowanego dźwięku. Eksperyment w dwutlenku węgla przeprowadzono najpierw umieszczając w worku włączony smartfon i arkusz tektury. Z worka usunięto powietrze, a następnie za pomocą taśmy klejącej zamknięto go szczelnie wokół rurki gumowej doprowadzającej dwutlenek węgla. W celu zapewnienia jednakowych warunków eksperymentu dla obu gazów, pomiary w powietrzu również wykonywano wewnątrz worka.

Aby móc dokonywać pomiarów wysokości arkusza tektury nad podłogą, linijkę umocowano pionowo obok worka za pomocą tektury i taśmy klejącej. Arkusz tektury podnoszono trzymając go przez worek od zewnątrz. Eksperyment przeprowadzono w powietrzu przy częstotliwości dźwięku 3050 Hz oraz w dwutlenku węgla przy częstotliwości 4300 Hz. Częstotliwości dobrano metodą prób i błędów, aby możliwe było wychwycenie kilku wyraźnych rezonansów. Ponieważ rezonanse mogą być słabo słyszalne, podczas pomiarów arkusz tektury przesuwano pionowo kilkakrotnie, aby upewnić się, że żadne maksimum nie zostało przeoczone. Otrzymane wyniki zaprezentowano na Rys. 2.



Rysunek 4: Wyniki pomiarów wraz z prostą najlepszego dopasowania oraz prostymi skrajnymi. Symbolami  $c^+$  oraz  $c^-$  oznaczono otrzymane współczynniki kierunkowe prostych skrajnych.

Do punktów pomiarowych dopasowano prostą opisaną równaniem (47) rozszerzonym o wolny parametr  $h_0$ :

$$h = n \frac{c}{2f} + h_0. \quad (48)$$

Parametr  $h_0$  wprowadzono, aby uwzględnić skończoną grubość smartfonu, która sprawia, że założenie, że interferencja zachodzi między dwiema płaszczyznami jest tylko przybliżeniem. Na podstawie dopasowania prostej wyznaczono wartość prędkości dźwięku w dwutlenku węgla. Po uwzględnieniu niepewności pomiaru otrzymanej metodą dopasowania dwóch skrajnych prostych otrzymano wynik

$$c_{dw} = (290 \pm 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (49)$$

Wartość prędkości dźwięku w powietrzu wyniosła

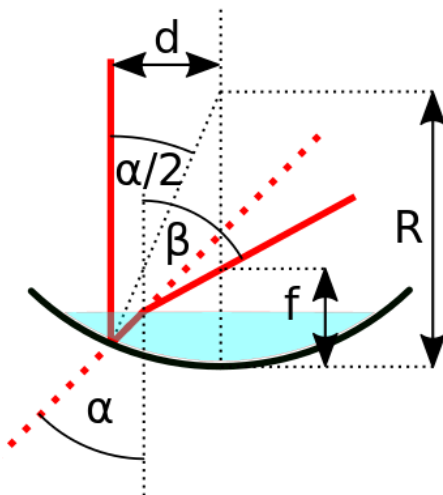
$$c_{pow} = (330 \pm 20) \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (50)$$

Komentarz:

Eksperyment wykonywano w temperaturze 23 °C. W takich warunkach tablicowa wartość prędkości dźwięku w powietrzu wynosi 345 m/s, a w dwutlenku węgla 269 m/s. Zawyżona wartość prędkości dźwięku w dwutlenku węgla może częściowo wynikać z nieintencjonalnej domieszki powietrza. Prędkość dźwięku równa 290  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  odpowiada mieszaninie o zawartości powietrza równej 30 %.

**Rozwiązanie zadania D3**Część teoretyczna

Zwierciadło wklęsłe o promieniu krzywizny  $R$  ustawione poziomo, na które nalano niewielką ilość cieczy będzie ogniskowało światło w innej odległości niż zwierciadło puste. Wzór na jego ogniskową można wyprowadzić dwoma równoważnymi metodami:

Metoda pierwsza:

Rozważmy promień światła równoległy do osi zwierciadła, odległy od tej osi o  $d$ , gdzie  $d \ll R$ . Promień ten po wejściu do cieczy, odbiciu od zwierciadła i wyjściu z cieczy zostanie odchylony w kierunku osi zwierciadła, a następnie przetnie ją w odległości  $f$ , równej ogniskowej zwierciadła.

Promień najpierw pokona granicę powietrze-woda. Ponieważ padanie jest prostopadłe, nie nastąpi załamanie światła na tej granicy ośrodków. Następnie promień odbija się od zwierciadła, tworząc kąt  $\alpha$  z początkowym kierunkiem biegu. Dwusieczna tego kąta jest prostopadła do zwierciadła, zatem przechodzi przez jego środek krzywizny, odległy od niego o  $R$ . Tangens kąta  $\alpha/2$  jest zatem wyznaczony przez równanie:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{R}. \quad (51)$$

Dla  $d \ll R$ , a zatem dla małych kątów  $\frac{\alpha}{2}$  można zastosować przybliżenie  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ :

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{R}. \quad (52)$$

A zatem kąt  $\alpha$  wynosi:

$$\alpha = \frac{2d}{R}. \quad (53)$$

Kąt  $\beta$ , czyli kierunek biegu światła po wyjściu z cieczy można obliczyć na podstawie prawa Snella:

$$\sin \beta = n \sin \alpha. \quad (54)$$

Możemy ponownie zastosować przybliżenie małych kątów  $\sin \alpha \approx \alpha$  oraz  $\sin \beta \approx \beta$  i obliczyć kąt  $\beta$ :

$$\beta = n\alpha = n \frac{2d}{R}. \quad (55)$$

Przy założeniu, że grubość warstwy wody jest mała, otrzymujemy, że ogniskowa  $f$  jest związana z kątem  $\beta$  równaniem

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d}{f}, \quad (56)$$

czyli:

$$f = \frac{d}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (57)$$

Po zastosowaniu przybliżenia  $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$  i wykorzystaniu równania (55) otrzymujemy:

$$f = \frac{R}{2n}. \quad (58)$$

Metoda druga:

Zwierciadło wklęsłe o promieniu krzywizny  $R$ , na które nalano niewielką ilość cieczy, z punktu widzenia wiązki światła jest układem optycznym złożonym kolejno z: płaskowypukłej soczewki o promieniu krzywizny  $R$  wykonanej z cieczy, zwierciadła wklęsłego o promieniu krzywizny  $R$  oraz drugiej, identycznej soczewki. Zdolność skupiająca zwierciadła wklęsłego o ogniskowej  $f_0$  wynosi:

$$Z_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2}{R}. \quad (59)$$

Zdolność skupiająca soczewki płaskowypukłej wykonanej z materiału o współczynniku załamania  $n$  jest opisana wzorem:

$$Z_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{R} (n - 1). \quad (60)$$

Można pokazać, że zdolność skupiająca układu cienkich elementów optycznych ustawionych w niewielkiej odległości od siebie jest sumą ich zdolności skupiających:

$$Z = Z_0 + 2Z_s = \frac{2}{R} + 2 \cdot \frac{1}{R} (n - 1) = \frac{2n}{R}. \quad (61)$$

A stąd otrzymujemy:

$$f = \frac{R}{2n}, \quad (62)$$

gdzie  $f$  jest ogniskową układu.

Ciąg dalszy rozwiązania:

Ogniskowa zwierciadła niewypełnionego wodą wynosi:

$$f_0 = \frac{R}{2}. \quad (63)$$



Mierząc eksperymentalnie ogniskową zwierciadła wypełnionego wodą i pustego możemy na podstawie równania (63) oraz równania (58) lub (62) wyznaczyć współczynnik załamania cieczy:

$$n = \frac{f_0}{f}, \quad (64)$$

Warunek skupienia światła lampy po odbiciu od pustego zwierciadła leżącego bezpośrednio pod nią jest określony równaniem

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{H} + \frac{1}{h_0}, \quad (65)$$

gdzie  $H$ ,  $h_0$  to odpowiednio odległość lampy oraz jej obrazu od dna zwierciadła. Analogicznie dla zwierciadła wypełnionego cieczą tworzy się ognisko w odległości  $h$ :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{H} + \frac{1}{h}. \quad (66)$$

Podstawiamy równania (65) i (66) do (64) i otrzymujemy szukany współczynnik załamania:

$$n = \frac{f_0}{f} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{H} + \frac{1}{h_0}}}{\frac{1}{\frac{1}{H} + \frac{1}{h}}} = \frac{h_0(H+h)}{h(H+h_0)}. \quad (67)$$

### Część doświadczalna

Lusterko kosmetyczne położono na podłodze pod lampą tak, że lampa znajdowała się na osi zwierciadła. Taśmą mierniczą zmierzono odległość od dna zwierciadła do żarówki, otrzymując wartość  $H = (205 \pm 1)$  cm. Odległość obrazu lampy od dna zwierciadła mierzono wkładając narożnik kartki papieru w wiązkę światła i szukając położenia, w którym widoczny jest ostry obraz żarówki lampy. Odległość tę mierzono taśmą mierniczą. Pomiar powtórzono kilkakrotnie i otrzymano średnią odległość  $h_0 = 23,8$  cm. Zebrane wyniki pomiaru różniły się od wartości średniej o nie więcej, niż 0,2 mm, którą to wartość przyjęto jako niepewność pomiaru. Następnie do zwierciadła nalano ciekłą warstwę płynu do mycia naczyń i powtórzono procedurę otrzymując wartość  $h = (17,0 \pm 0,2)$  cm. Na podstawie pomiarów obliczono wartość współczynnika załamania światła dla użytego płynu do mycia naczyń:

$$n = 1,36 \pm 0,02. \quad (68)$$

Niepewność wyniku końcowego obliczono jako pierwiastek z sumy kwadratów niepewności pochodzących od niepewności mierzonych wielkości  $h$ ,  $h_0$  oraz  $H$ . Niepewności pochodzące od każdej z mierzonych wielkości obliczano jako połowę różnicy między wartością współczynnika załamania  $n$  obliczoną dla danej mierzonej wielkości pomniejszonej oraz powiększonej o wartość jej niepewności.

**UWAGA:** Niepewność wyniku końcowego mierzonego pośrednio obliczono zgodnie z Rekomendacją Polskiego Towarzystwa Fizycznego: <https://www.ptf.net.pl/pl/programy/edukacja/rekomendacja/>. Akceptowane są także inne metody oszacowania niepewności pomiarowej.