LXXI OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 16.01.2022

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1

Świstak Ś. żyje na płaskiej, poziomej równinie. Niestety na tej samej równinie żyją również atakujące go w nocy drapieżniki. W celu obrony przed nimi, Ś. co jakiś czas wydaje krótki pisk o częstotliwości f_0. Na podstawie odbitego od napastnika dźwięku (echa pisku), w odpowiedniej chwili rzuca kamieniem w kierunku, z którego doszedł ten dźwięk. Kamień jest zawsze rzucany z prędkością v_0, pod kątem α do poziomu. Przyjmując, że odstęp czasu między wysłaniem dźwięku i usłyszeniem echa wynosi Δt, częstotliwość usłyszanego przez Ś. odbitego dźwięku to f_1 ($f_1 > f_0$), oraz że napastnik biegnie ze stałą prędkością w kierunku Ś., wyznacz czas t, po którym od wydania pisku świstak powinien rzucić kamieniem, by trafić napastnika.

Prędkość dźwięku w powietrzu jest równa u, przyspieszenie grawitacyjne jest równe g. Świstak pozostaje cały czas w tym samym miejscu.

Zadanie 2

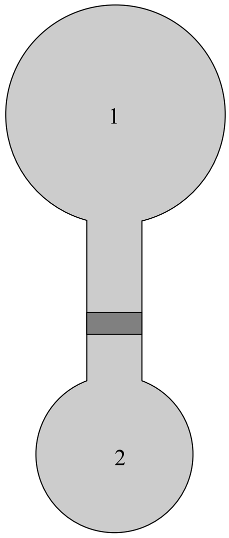
Zgodnie z symetrystyczną teorią kształtu Ziemi, jest ona z jednej strony płaska (żeby zadowolić płaskoziemców), a z drugiej okrągła (żeby zadowolić kulistoziemców) – czyli ma kształt półkuli. Zakładając, że ta półkula jest jednorodna i ma gęstość ρ, a na środku płaskiej części przyspieszenie grawitacyjne wynosi g, wyznacz promień tej półkuli.

Podaj wynik liczbowy dla $\rho = 5{,}5\ \mathrm{g/cm^3}$, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

Uniwersalna stała grawitacyjna jest równa $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\ s^2)}$.

Zadanie 3

Dwa zbiorniki – górny i dolny – są połączone pionową rurką o polu powierzchni przekroju poprzecznego S, w której może się przesuwać bez tarcia masywny, szczelny, przewodzący ciepło tłok. Ciśnienie i objętość gazu doskonałego nad tłokiem wynoszą p_1 i V_1, a ciśnienie i objętość takiego samego gazu pod tłokiem wynoszą p_2 i V_2. Układ jest w równowadze - zarówno mechanicznej, jak i termodynamicznej. Temperatura gazu i tłoka jest jednakowa i wynosi T. Ścianki zbiorników i rurka są idealnymi izolatorami ciepła, a ich pojemność cieplna jest zaniedbywana.



Wyznacz pojemność cieplną układu, tzn. współczynnik C w zależności

$$\Delta Q = C \Delta T,$$

gdzie ΔQ jest ciepłem, jakie należy dostarczyć do układu, aby temperatura podniosła się o ΔT, przy czym $\Delta T \ll T$.

Ciepło molowe przy stałej objętości rozważanego gazu jest równe c_V, a ciepło właściwe materiału, z którego wykonany jest tłok wynosi c_{T}. Przyspieszenie grawitacyjne jest równe g. Po podgrzaniu o ΔT układ też jest w stanie równowagi – zarówno termodynamicznej, jak i mechanicznej. Objętości zbiorników i rurki przy podgrzewaniu nie ulegają zmianie.

Podaj wynik liczbowy dla $V_1 = 0{,}10\ \mathrm{m^3}$, $V_2 = 0{,}10\ \mathrm{m^3}$, $p_1 = 1{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$, $p_2 = 5{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$, $S = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2}$, $T = 300\ \mathrm{K}$, $c_{\mathrm{T}} = 130\ \mathrm{J/(kg{\cdot}K)}$, $c_V = 29\ \mathrm{J/(mol{\cdot}K)}$, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Uniwersalna stała gazowa wynosi $R = 8{,}31\ \mathrm{J/(mol{\cdot}K)}$

LXXI OLIMPIADA FIZYCZNA
ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Rozwiązanie zadania 1

Pisk wysłany przez świstaka przebywa drogę do napastnika, odbija się od niego i wraca. Ponieważ świstak się nie porusza, dźwięk odbija się w chwili $\Delta t/2$, a napastnik znajduje się wtedy w odległości

$$s_0 = u\frac{\Delta t}{2}. \tag{1}$$

Zgodnie z wzorami Dopplera częstotliwość odbitego dźwięku słyszanego przez świstaka jest równa

$$f_1 = \frac{u}{u-w}\frac{u+w}{u}f_0, \tag{2}$$

gdzie w to prędkość zbliżającego się napastnika. Czynnik $\frac{u+w}{u}$ to czynnik Dopplera dla poruszającego się obserwatora, zbliżającego się źródła (czyli $\frac{u+w}{u}f_0$ to częstotliwość dźwięku słyszana przez napastnika), natomiast czynnik $\frac{u}{u-w}$ to czynnik Dopplera dla poruszającego się źródła zbliżającego się do obserwatora.

Z powyższego równania wyznaczamy prędkość napastnika

$$w = \frac{f_1 - f_0}{f_1 + f_0}u. \tag{3}$$

Przy rzucie ukośnym z prędkością v_0 pod kątem α czas ruchu to $\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ (jest to czas rzutu pionowego do góry z prędkością początkową $v_0 \sin\alpha$), zatem zasięg rzutu to

$$s_\mathrm{r} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}v_0 \cos\alpha, \tag{4}$$

gdzie $v_0 \cos\alpha$ jest poziomą składową prędkości kamienia.

W chwili upadku kamienia t_u (mierzonej od wydania pisku)

$$t_\mathrm{u} = t + \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \tag{5}$$

napastnik powinien być dokładnie w odległości s_r od świstaka, zatem

$$s_\mathrm{r} = s_0 - w\left(t_\mathrm{u} - \frac{\Delta t}{2}\right), \tag{6}$$

gdzie $w\left(t_\mathrm{u} - \frac{\Delta t}{2}\right)$ jest drogą, jaką przebiegnie napastnik od chwili odbicia dźwięku (był wtedy w odległości s_0 od świstaka) do chwili upadku kamienia.

Z powyższych równań wyznaczamy szukany czas t

$$t = \left(\frac{\Delta t}{2} - \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{gu}\right)\frac{f_1 + f_0}{f_1 - f_0} + \frac{\Delta t}{2} - \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{7}$$

Zauważmy, że dla pewnych wartości parametrów powyższe t może być mniejsze od Δt lub nawet ujemne. Oznacza to, że Ś. nie zdąży rzucić kamieniem tak, by trafić napastnika.

Uzupełnienie – wyznaczenie współczynnika zmiany częstotliwości (2).

Rozważmy grzbiet fali dźwiękowej pisku, wychodzący od świstaka w chwili τ. Uwzględniając, że względna prędkość fali i napastnika wynosi $u + w$, chwila τ', w której rozważany grzbiet fali dotrze do napastnika, spełnia równanie

$$\tau' - \tau = \frac{s(\tau)}{u + w},$$

gdzie $s(\tau) = \text{const} - w\tau$ jest odległością napastnika od świstaka w chwili τ (const jest stałą).

Ponieważ świstak się nie porusza, po odbiciu od napastnika, rozważanemu grzbietowi fali zajmie również czas $\tau' - \tau$ dotarcie z powrotem do świstaka. Zatem chwila τ'', w której grzbiet wróci do świstaka jest dana wzorem

$$\tau'' = 2\left(\tau' - \tau\right) + \tau = 2\frac{\text{const} - w\tau}{u + w} + \tau = \frac{u - w}{u + w}\tau + 2\frac{\text{const}}{u + w}.$$

Dla następnego grzbietu fali związek jest analogiczny, przy czym zamiast τ należy wstawić $\tau + 1/f_0$, a zamiast τ'' należy wstawić $\tau'' + 1/f_1$. W konsekwencji otrzymamy

$$\frac{1}{f_1} = \frac{u - w}{u + w}\frac{1}{f_0},$$

co jest związkiem równoważnym równaniu (2).

Komentarze od organizatorów

Zadanie T1 przygotowane było przez KGOF jako zadanie dość łatwe. Rozwiązanie zadania wymagało znajomości i biegłego posługiwania się prawami ruchu jednostajnego, prawami rzutu ukośnego, oraz prawami rządzącymi efektem Dopplera. Zadanie dobrze zróżnicowało uczestników części teoretycznej drugiego etapu Olimpiady. Większość uczestników części doświadczalnej etapu drugiego miała dobrze lub bardzo dobrze rozwiązane to zadanie. Duża liczba uczestników (około połowa z nich) rozwiązała to zadanie bezbłędnie lub z drobnymi błędami rachunkowymi. Takie rozwiązania oceniane były na 15 i więcej punktów. Zwraca uwagę duża liczba rozwiązań bezbłędnych (około 50). Typowym poważniejszym błędem znajdującym się z drugiej połowie rozwiązań, było niewłaściwie zastosowane prawo opisujące efekt Dopplera – w tym przypadku chodzi o zmianę częstości fali odbijającej się od poruszającego obiektu, a nie tylko emitowane przez poruszające się źródło lub poruszający się detektor. Rozwiązania z takim błędem oceniane były na 14 punktów, jeśli nie było innych błędów. Zdarzały się jednak drobne błędy rachunkowe w niektórych rozwiązaniach, w tym przypadku ocena była nieco niższa.

Punktacja zadania 1.

Odległość napastnika od świstaka w chwili odbicia dźwięku (wzór (1)) .... 1 pkt.
Związek między f_1 a f_0 (wzór (2) lub równoważny) – 2 pkt. Jeśli wzór jest poprawny
tylko z dokładnością do wyrazów liniowych w w/u .... 1 pkt.
Prędkość napastnika (wzór (3) lub równoważny) .... 1 pkt.

Jeśli wzór jest poprawny tylko z dokładnością do wyrazów liniowych w $(f_1 - f_0)/f_0$ w konsekwencji przybliżonego wzoru na f_1 – nadal 1 pkt.

Zasięg rzutu (wzór (4) lub równoważny) .... 1 pkt.

Chwila upadku kamienia (wzór (5) lub równoważny) .... 1 pkt.

Ogólna postać warunku na chwilę t odpowiadającą trafieniu kamieniem w napastnika (wzór (6) lub równoważny) .... 2 pkt.

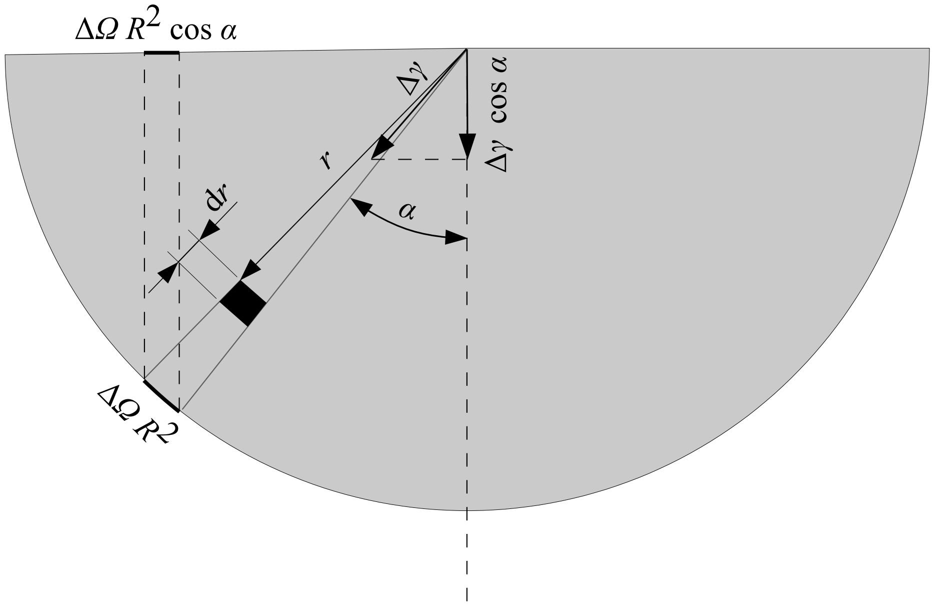
Szukane t (wzór (7) lub równoważny) .... 2 pkt.

Jeśli wzór jest poprawny tylko z dokładnością do wyrazów liniowych w $(f_1 - f_0)/f_0$ – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 2

Podzielmy naszą półkulę na małe wycinki kuli, o rozmiarach poprzecznych do promienia znacznie mniejszych od niego – w praktyce są to ostrosłupy o wierzchołku w środku płaskiej części półkuli i wysokości R.

Rozważmy jeden taki wycinek o kącie bryłowym $\Delta\Omega$, tworzący z osią półkuli kąt α.



Rys. do rozw. zad. 2– przekrój półkuli. Przedstawiono jej wycinek o kącie bryłowym $\Delta\Omega$, tworzący z osią półkuli kąt α, fragment tego wycinka - warstwę o grubośći dr, podstawę tego wycinka o powierzchni $\Delta\Omega R^2$, rzut tej podstawy na płaską część półkuli, przyspieszenie grawitacyjne od wycinka $\Delta\gamma$ oraz składową tego przyspieszenia wzdłuż osi półkuli.

Przyspieszenie grawitacyjne w jego wierzchołku otrzymamy sumując przyczynki pochodzące od warstw znajdujących się w przybliżeniu w stałej odległości od wierzchołka. Masa takiej jednej warstwy o grubości dr, znajdującej się w odległości r od wierzchołka jest równa

$$\rho\Delta\Omega r^2 \mathrm{d}r, \tag{8}$$

a przyspieszenie grawitacyjne pochodzące od niej to

$$G\frac{\rho\Delta\Omega r^2 \mathrm{d}r}{r^2} = G\rho\Delta\Omega \mathrm{d}r. \tag{9}$$

Uwzględniliśmy tu, że rozmiary poprzeczne warstwy są małe w porównaniu z odległością od wierzchołka, a zatem w prawie grawitacji można taka warstwę traktować jako punktową masę.

Zatem całkowite przyspieszenie grawitacyjne pochodzące od rozważanego wycinka kuli w jego wierzchołku wynosi

$$\Delta\gamma = \sum G\rho\Delta\Omega \mathrm{d}r = G\rho\Delta\Omega\sum \mathrm{d}r = G\rho\Delta\Omega R, \tag{10}$$

gdzie sumujemy po warstwach.

(Jest nieco inaczej zapisany wynik zadania N7 z I stopnia tegorocznej Olimpiady).

To przyspieszenie jest wzdłuż osi wycinka, czyli tworzy z osią półkuli kąt α. Z symetrii półkuli wynika, że szukane przyspieszenie wypadkowe będzie skierowane wzdłuż osi półkuli. Składowa przyspieszenia pochodzącego od jednego ostrosłupa wzdłuż osi półkuli wynosi

$$\Delta\gamma\cos\alpha = G\rho\Delta\Omega R\cos\alpha. \tag{11}$$

Przyspieszenie wypadkowe jest równe sumie takich przyspieszeń od wszystkich wycinków kuli znajdujących sie w rozważanej półkuli. Zauważmy, że $R^2\Delta\Omega\cos\alpha$ to rzut powierzchni podstawy wycinka na płaską powierzchnię półkuli, a zatem suma wszystkich takich rzutów jest równa powierzchni płaskiej części półkuli, czyli πR^2. Czyli sumując po wszystkich wycinkach kuli wchodzących w skład rozważanej półkuli dostaniemy

$$g = G\rho R\pi. \tag{12}$$

Stąd

$$R = \frac{g}{\pi G\rho}. \tag{13}$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy

$$R = 8{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{km}. \tag{14}$$

Komentarze od organizatorów

Pośród podejmowanych przez uczniów prób rozwiązań zadania praktycznie nie było prac które podążałyby drogą rozumowania zbliżoną do oficjalnego rozwiązania. Przeważająca liczba uczestników starała się uzyskać związek pomiędzy przyspieszeniem grawitacyjnym a promieniem półkuli poprzez obliczenie odpowiedniej całki po półkuli.

Dwa najczęstsze schematy dyskretyzacji półkuli polegały albo na wypełnieniu jej współśrodkowymi półsferami albo pocięciu jej na równoległe do płaskiej powierzchni cienkie plastry. Półsfery lub okrągłe plastry dzielono następnie na cienkie pierścienie.

Niestety, takie drogi rozumowania nie dają się w bezpośredni sposób przełożyć na kryteria oceny dostosowane do oficjalnego rozwiązania, przez co recenzenci zadań zmuszeni byli do określenia alternatywnych kryteriów oceny dla tego rodzaju rozwiązań.

Przyjęte przez KGOF kryteria oceny rozwiązania poprzez bezpośrednie całkowanie były następujące:

- Spostrzeżenie, że za sprawą symetrii wypadkowe przyspieszenie jest prostopadłe do płaskiej powierzchni półkuli – 1 pkt
- Wydzielenie właściwej składowej pola grawitacyjnego podczas sumowania – 1 pkt
- Prawidłowe zapisanie natężenia pola grawitacyjnego od małego fragmentu półkuli – 2 pkt
- Poprawne obliczenie pola od cienkiego pierścienia – 1 pkt
- Poprawne obliczenie pola od plastra bądź półsfery – 1 pkt
- Poprawne obliczenie pola od całej półkuli – 2 pkt
- Poprawny wzór końcowy – 1 pkt
- Poprawny wynik liczbowy – 1 pkt

Przy czym błąd w podpunkcie 3. lub kolejnych zasadniczo uniemożliwiał uzyskanie punktów za następne podpunkty.

Najczęstsze błędy występujące w rozwiązaniach były następujące:

1. Przyjęcie, że siła grawitacji półkuli jest równa sile grawitacji punktu materialnego o masie równej masie półkuli, umieszczonego w środku masy półkuli.
2. Próba zastosowania prawa Gaussa - rozważany układ nie posiadał niestety wystarczającej symetrii, by możliwe było sensowne zastosowanie tej metody.
3. Zignorowanie wektorowej natury natężenia pola grawitacyjnego i bezpośrednie dodawanie wartości natężeń skierowanych w różnych kierunkach. Pokrewnym błędem było stosowanie wzoru $F = GMm/r^2$ do masy, która nie była punktowa (np. do całej półsfery).
4. Przyjęcie, że punkty na płaskim plastrze znajdują się w identycznej odległości od środka płaskiej powierzchni półsfery.
5. Próba całkowania grawitacji od półsfery poprzez wypełnienie jej półkolami. W żadnym z zaprezentowanych rozwiązań ten sposób podziału półsfery na rozłączne kawałki nie został zastosowany poprawnie.

Ponieważ rozwiązanie zadania zasadniczo sprowadzało się do znalezienia wartości współczynnika A w wyrażeniu $g = AGR\rho$, przez to istniało pewne ryzyko znalezienia poprawnej wartości A na podstawie błędnych przesłanek. Niektóre takie rozwiązania prezentowały do tego łudząco podobne do poprawnego rozumowaniem. Najtrudniejsza do dostrzeżenia sposobność do takiego błędu pojawiała się przy próbie całkowania po płaskich plastrach półsfery. Obliczenie całki nieoznaczonej zamiast oznaczonej po płaskich plastrach lub pomylenie granic całkowania potrafiło mimo wszystko doprowadzić do identycznego z poprawnym wyniku na koniec.

Punktacja zadania 2.

Podział półkuli na kuli na elementy, które można traktować jako punktowe i pole od takiego elementu (wzór (9) lub równoważny) ....2 pkt.

Przyspieszenie pochodzące od wąskiego wycinka kuli (wzór (10)) ....2 pkt.

Zauważenie, że przyspieszenie wypadkowe jest skierowane wzdłuż osi półkuli oraz uwzględnienie kąta .... 2 pkt.
Zauważenie, że $\Delta S \cos\theta$ jest rzutem na płaską część półkuli i policzenie sumy jako πR^2 (lub inny, poprawny sposób wyznacznienia tej sumy) .... 2 pkt.
Wzór końcowy .... 1 pkt.
Wynik liczbowy (14) .... 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3

Zauważmy, że ΔQ to energia potrzebna do zwiększenia energii wewnętrznej gazu, zwiększenia energii wewnętrznej tłoka, oraz przesunięcia tłoka, czyli

$$\Delta Q = c_V n_1 \Delta T + c_V n_2 \Delta T + m c_T \Delta T + mg\Delta x, \tag{15}$$

gdzie n_1 oraz n_2 to liczby moli gazu odpowiednio nad i pod tłokiem, m to masa tłoka a Δx jego przesunięcie (dodatnie – w górę).

Uwzględniając równanie stanu gazu doskonałego $pV = nRT$ oraz warunek równowagi tłoka

$$(p_2 - p_1)\, S = mg, \tag{16}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \tfrac{c_V}{R}\tfrac{p_1V_1}{T}\Delta T + \tfrac{c_V}{R}\tfrac{p_2V_2}{T}\Delta T + m_{\mathrm{T}}\Delta T + p_2\Delta V_2 + p_1\Delta V_1 = \\ &= \tfrac{c_V}{R}\tfrac{p_1V_1}{T}\Delta T + \tfrac{c_V}{R}\tfrac{p_2V_2}{T}\Delta T + mc_{\mathrm{T}}\Delta T + (p_2 - p_1)\,\Delta V_2,\end{aligned} \tag{17}$$

gdzie ΔV_2 jest przyrostem objętości pod cylindrem, a $\Delta V_1 = -\Delta V_2$ jest przyrostem objętości nad cylindrem (oczywiście może to być wielkość ujemna), a $(p_2 - p_1)\,\Delta V_2 = (p_2 - p_1)\, S\Delta x = mg\Delta x$.

Zauważmy, że z równania stanu gazu doskonałego wynika, że przy małej zmianie temperatury

$$p\Delta V + V\Delta p = nR\Delta T, \tag{18}$$

gdzie pominęliśmy wyrazy proporcjonalne do $\Delta V \cdot \Delta p$ i przyjęliśmy, że n jest stałe.

Uwzględniając równanie stanu gazu doskonałego, powyższe równanie można zapisać w postaci

$$\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta T}{T}, \tag{19}$$

lub

$$\frac{p}{V}\Delta V + \Delta p = \frac{p}{T}\Delta T, \tag{20}$$

Odejmując stronami tego typu równanie dla gazu pod tłokiem od odpowiedniego równania nad tłokiem otrzymamy

$$\frac{p_2}{V_2}\Delta V_2 - \frac{p_1}{V_1}\Delta V_1 + \Delta p_2 - \Delta p_1 = \frac{p_2}{T}\Delta T - \frac{p_1}{T}\Delta T.$$

Ale po podgrzaniu gazu znowu ustala się równowaga mechaniczna, zatem

$$\Delta p_2 - \Delta p_1 = 0. \tag{21}$$

Uwzględniając dodatkowo $\Delta V_1 = -\Delta V_2$ otrzymamy

$$\Delta V_2 = \frac{p_2 - p_1}{T\left(\frac{p_2}{V_2} + \frac{p_1}{V_1}\right)}\Delta T. \tag{22}$$

Podstawiając to do wzoru na ΔQ otrzymujemy

$$\Delta Q = \frac{c_V}{R}\frac{p_1 V_1}{T}\Delta T + \frac{c_V}{R}\frac{p_2 V_2}{T}\Delta T + m c_{\mathrm{T}}\Delta T + \frac{(p_2 - p_1)^2}{T\left(\frac{p_2}{V_2} + \frac{p_1}{V_1}\right)}\Delta T. \tag{23}$$

Masę tłoka m wyznaczymy z warunku równowagi mechanicznej w stanie początkowym; otrzymamy

$$m = \frac{(p_2 - p_1)\,S}{g} \tag{24}$$

Zatem szukana pojemność cieplna jest równa

$$C = \frac{c_V}{RT}(p_1 V_1 + p_2 V_2) + \frac{(p_2 - p_1)\,S}{g}c_{\mathrm{T}} + \frac{(p_2 - p_1)^2}{T\left(\frac{p_2}{V_2} + \frac{p_1}{V_1}\right)}. \tag{25}$$

Dla danych liczbowych z treści zadania otrzymujemy

$$C = 840\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}. \tag{26}$$

Punktacja zadania 3.

Ogólny wzór na energię potrzebna do zwiększenia energii wewnętrznej gazu przy wzroście temperatury o ΔT (wzór (15) lub równoważny) .... 3 pkt
-1 pkt za każdy brakujący element.
Wyznaczenie masy tłoka (wzór (24) lub równoważny) .... 1 pkt.
Uwzględnienie równania stanu gazu doskonałego do wyznaczenia liczby moli gazu nad oraz pod tłokiem (jak np. we wzorze (17)) .... 1 pkt.
Związek między zmianami ΔV, Δp, ΔT wynikający z równania stanu doskonałego (wzór (20) lub równoważny) .... 1 pkt.
Związek między zmianami ciśnienia wynikający z równowagi mechanicznej w nowej sytuacji (wzór (21) lub równoważny) .... 1 pkt.
Jawny wzór na zmianę objętości lub przesunięcie tłoka (wzór (22) lub równoważny) . 1 pkt.
Jawny wynik końcowy (wzór (25) lub równoważny) .... 1 pkt.
Wynik liczbowy (wzór (26)) .... 1 pkt.