# LXXI OLIMPIADA FIZYCZNA

## ZAWODY III STOPNIA

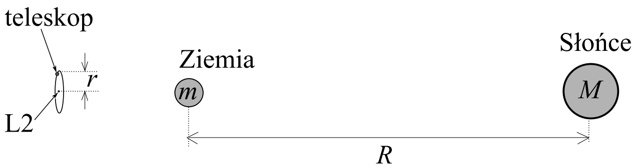
CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 10.04.2022

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

**Uwaga: na końcu treści są podane ogólne zależności matematyczne, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań.**

### Zadanie 1

Kosmiczny teleskop Jamesa Webba krąży wokół punktu Lagrange'a L2 (patrz definicję poniżej) po – w przybliżeniu kołowej – orbicie o promieniu $r$.




Rys. 1. Schematyczne przedstawienie teleskopu Webba krążącego wokół punktu L2. Pokazano również Słońce oraz Ziemię.

Wyznacz okres obiegu $T$ teleskopu po tej orbicie, zdefiniowany jako najmniejszy odstęp czasu między dwoma kolejnymi położeniami, odpowiadającymi maksymalnej odległości teleskopu od płaszczyzny obiegu Ziemi wokół Słońca i znajdującymi się po tej samej stronie tej płaszczyzny. Wynik wyraź przez $r$, masę Słońca $M$, masę Ziemi $m$, promień orbity Ziemi wokół Słońca $R$ oraz okres obiegu Ziemi wokół Słońca $T_{\mathrm{O}}$.

Pomiń oddziaływanie Księżyca i pozostałych ciał niebieskich. Przyjmij, że orbita Ziemi wokół Słońca jest kołowa i uwzględnij, że masa Słońca jest znacznie większa od masy Ziemi. Rozważ tylko $r$ znacznie mniejsze od odległości Ziemi od punktu L2.

Punkt Lagrange'a L2 to punkt na osi Słońce-Ziemia, po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce, taki, że ciało w nim umieszczone może pozostawać w tym samym położeniu względem Słońca oraz Ziemi. Uwzględnij, że odległość punktu L2 od środka Ziemi jest znacznie mniejsza od odległości Ziemi od Słońca – co wynika z faktu, że $M \gg m$.

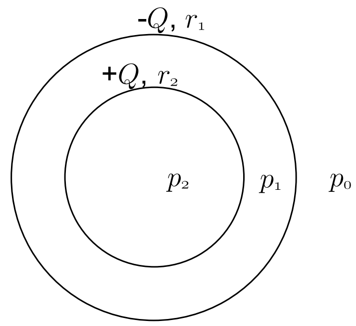
**Uwaga**:

Weź pod uwagę, że w obracającym się układzie nieinercjalnym działa siła Coriolisa.

Wektor tej siły leży w płaszczyźnie obrotu układu nieinercjalnego i jest prostopadły do prędkości ciała w tym układzie. Wartość siły Coriolisa jest równa $2\mu\omega\,|v_\perp|$, gdzie $\vec{v}_\perp$ jest rzutem prędkości ciała na płaszczyznę obrotu układu, $\omega$ – prędkość kątowa tego obrotu, a $\mu$ – masa ciała. Zwrot tej siły jest zgodny ze zwrotem $\vec{v}_\perp$ obróconego o kąt $90^{\circ}$ w płaszczyźnie obrotu układu przeciwnie do tego obrotu. (Przy użyciu pojęcia wektora prędkości kątowej oraz iloczynu wektorowego siłę Coriolisa można zapisać jako $-2\mu\vec{\omega} \times \vec{v}$.)

### Zadanie 2

Wewnątrz sferycznej bańki mydlanej o promieniu $r_1$ znajduje się współśrodkowa z nią bańka mydlana o promieniu $r_2$ – patrz rysunek. Bańki są naładowane jednorodnie – wewnętrzna ładunkiem $+Q$, a zewnętrzna ładunkiem $-Q$. Napięcie powierzchniowe wody z mydłem tworzącej bańki wynosi $\sigma$. Na zewnątrz większej bańki ciśnienie powietrza wynosi $p_0$. Układ jest w równowadze. Wyznacz ciśnienie $p_2$ powietrza wewnątrz mniejszej bańki oraz ciśnienie $p_1$ powietrza pomiędzy bańkami.



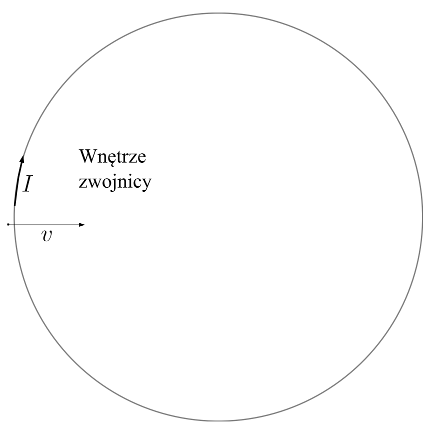

Rys. 2. Dwie współśrodkowe, naładowane bańki mydlane.

Informacja dodatkowa

Dla wody z mydłem o współczynniku napięcia powierzchniowego $\sigma$ energia powierzchniowa utworzonej z niej błonki o powierzchni $S$ jest równa $2\sigma S$ (czynnik 2 pojawia się, gdyż musimy uwzględnić obie strony błonki).

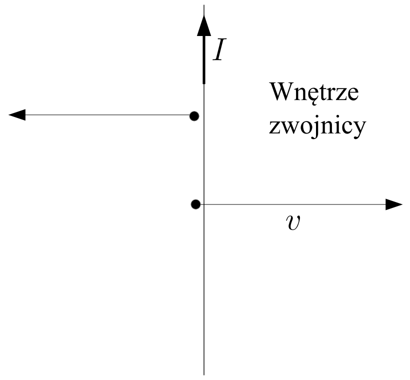
### Zadanie 3

Zwojnica składa się z $N$ równomiernie nawiniętych zwojów cienkiego drutu tworzących w sumie powierzchnię boczną walca o promieniu $r$ i długości $h$, przy czym $h \gg r$. Przez tę zwojnicę płynie zmienny prąd o natężeniu $I = I_0 \sin \Omega t$, gdzie $I_0$ i $\Omega$ oznaczają dodatnie stałe, a $t$ – czas. W chwili $t = 0$ przez mały odstęp między zwojami do wnętrza zwojnicy, prostopadle do jej powierzchni bocznej, wleciała z prędkością $v$ mała kulka o masie $m$, naładowana ładunkiem $q$, patrz Rys. 3.1.




Rys. 3.1. Przekrój zwojnicy prostopadle do jej osi. Pokazana jest również wlatująca do jej środka kulka.

Zaobserwowano, że po chwili kulka wyleciała ze zwojnicy w kierunku przeciwnym do początkowego, patrz Rys. 3.2.




Rys. 3.2. Powiększony fragment przekroju zwojnicy prostopadle do jej osi. Oprócz kulki tuż przed wlotem do zwojnicy, pokazana jest też ta sama kulka tuż po wylocie ze zwojnicy.

a) Przy ustalonych pozostałych parametrach wyznacz najmniejsze $I_0$, dla którego opisana sytuacja może zajść. Naszkicuj tor ruchu kulki wewnątrz zwojnicy.

b) Naszkicuj tor ruchu kulki wewnątrz zwojnicy w następujących przypadkach (wymagane jest uzasadnienie każdego z przedstawionych szkiców):

(i) wartość $I_0$ jest dwukrotnie większa niż wartość wyznaczona w pkt. a),

(ii) wartość $I_0$ jest dwukrotnie mniejsza niż wartość wyznaczona w pkt. a).

Przyjmij, że odległość między miejscem, gdzie kulka wleciała do zwojnicy, a miejscem, w którym z niej wyleciała, jest znacznie mniejsza od $r$ (patrz Rys. 3.2.) – z punktu widzenia kulki wlatuje ona w półprzestrzeń wypełnioną jednorodnym w przestrzeni (choć zmiennym w czasie) polem magnetycznym. Pomiń pole elektryczne indukowane przez zmienne pole magnetyczne i oddziaływanie elektrostatyczne kulki z drutami zwojnicy.

**Zależności, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań:**

1. Dla $|x| \ll 1$, $(1+x)^r \approx 1 + rx$, gdzie $r$ jest liczbą rzeczywistą.

2. Związki między prędkością $v$ a drogą $s$:
jeśli $v = v_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^n$, to $s = \frac{v_0 t_0}{n+1} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{n+1} + C$;
jeśli $v = v_0 \cos\left(\frac{t}{t_0}\right)$, to $s = v_0 t_0 \sin\left(\frac{t}{t_0}\right) + C$;
jeśli $v = v_0 \sin\left(\frac{t}{t_0}\right)$, to $s = -v_0 t_0 \cos\left(\frac{t}{t_0}\right) + C$;
jeśli $v = v_0 e^{t/t_0}$, to $s = v_0 t_0 e^{t/t_0} + C$;
gdzie $t$ – czas, $v_0$, $t_0$, $C$, $n$ – stałe, przy czym $n \neq -1$.