

LXXI OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA, 9.04.2022

Za zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Masz do dyspozycji:

- magnes neodymowy w kształcie walca, o kierunku namagnesowania równoległym do osi walca,
- sprężystą drewnianą listewkę zamocowaną w imadle, z bliźniaczym magnesem umieszczonym na jej końcu,
- drut miedziany pokryty izolującą emalią,
- oscyloskop wraz z przewodami i zaciskami niezbędnymi do zestawienia układu,
- prostopadłościenne drewniane klocki,
- taśmę klejącą oraz nożyczki,
- linijkę.

a) Wyznacz częstotliwość f_0 drgań własnych listewki z magnesem w nieobecności drugiego magnesu.

b) Załóż, że siłę F oddziaływania dwóch współosiowych, cylindrycznych magnesów dostępnych w zestawie doświadczalnym można opisać wzorem:

$$F = C \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^\gamma,$$

gdzie: L – odległość pomiędzy środkami magnesów, C oraz γ – parametry opisujące oddziaływanie, natomiast l_0 – stała równa 1 cm. Wyznacz wartość wykładnika γ dla $L > 4$ cm.

Wskazówka 1: Dla małych wychyleń z położenia równowagi, siła działająca na listewkę z magnesem powodująca jej powrót do położenia równowagi jest wprost proporcjonalna do jej wychylenia.

Wskazówka 2: W rozwiązaniu może być przydatna zależność matematyczna obowiązująca dla każdego α , dla $x \ll 1$:

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x$$

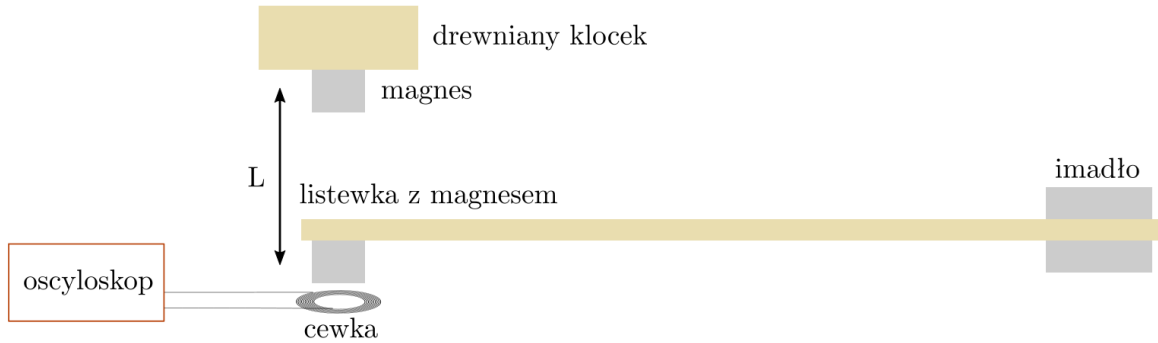
Uwaga 1: Pomiń wpływ ziemskiego pola magnetycznego.

Uwaga 2: Aby wykonać podłączenie elektryczne do drutu miedzianego należy najpierw usunąć warstwę izolującej emalii. Możesz usunąć warstwę emalii z drutu na przykład poprzez dociśnięcie go kciukiem do ostrej krawędzi nożyczek, a następnie wyciągnięcie, które spowoduje zdrapanie warstwy emalii. Taką czynność należy powtórzyć kilkakrotnie z różnych stron drutu.

Uwaga 3: Oprócz zestawu doświadczalnego otrzymujesz tester ciągłości elektrycznej składający się z baterii oraz brzęczyka. Możesz go użyć do sprawdzenia, czy izolacja została skutecznie usunięta z drutu.

Rozwiązanie

Pomysł rozwiązania można zaproponować biorąc bezpośrednio wskazówkę z zadania i stosując ją do układu doświadczalnego przedstawionego na Rys. 1.



Rysunek 1: Schemat układu pomiarowego do pomiaru częstotliwości drgań listewki z magnesem (widok z góry).

Zawiera on listewkę z magnesem zamocowaną w taki sposób, że może wykonywać małe drgania wokół położenia równowagi. Cewka umieszczona w pobliżu drgającego magnesu pozwala na odczyt częstości tych drgań na oscyloskopie. Według warunków zadania listewka z magnesem wykonuje drgania harmoniczne. Badać będziemy częstość tych drgań w obecności pola magnetycznego pochodzącego od drugiego magnesu, umieszczonego w pewnej odległości L . Analizę doświadczenia przeprowadzimy dla przypadku, gdy oba magnesy odpychają się, aby uniknąć ich niekontrolowanego zetknięcia się. Przy zbliżaniu drugiego magnesu, nawet w znacznej odległości, możemy spodziewać się mniej lub bardziej mierzalnego odchylenia listewki z magnesem od jej położenia w nieobecności pola magnetycznego. W rozważaniach wielkość L będzie rozpatrywana jako rzeczywista odległość pomiędzy oddziałującymi magnesami. Jeśli układ taki wprawimy w małe drgania to listewka z magnesem będzie wykonywała ruch harmoniczny o częstości ω . Gdy listewka z magnesem się nie porusza i znajduje się w położeniu równowagi możemy zapisać warunek działającej na nią zerowej siły wypadkowej:

$$0 = -kx + C \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^\gamma, \quad (1)$$

gdzie k to wypadkowa siła sprężystości działająca na końcówkę listewki z magnesem, x to wychylenie listewki względem pozycji równowagi przy braku oddziaływania z drugim magnesem.

Wychylając końcówkę o odległość Δx możemy sprawić, że równowaga sił nie będzie zachowana, a magnes zacznie poruszać się z przyspieszeniem a :

$$ma = -k(x + \Delta x) + C \cdot \left(\frac{L + \Delta x}{l_0}\right)^\gamma, \quad (2)$$

gdzie m jest pewną efektywną masą opisującą magnes i listewkę. Odejmując stronami równanie (2) od równania (1) otrzymujemy:

$$ma = -k\Delta x + C \cdot \left(\frac{L + \Delta x}{l_0}\right)^\gamma - C \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^\gamma. \quad (3)$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$ma = -k\Delta x + C \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^\gamma \left(1 + \frac{\Delta x}{L}\right)^\gamma - C \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^\gamma, \quad (4)$$

a następnie:

$$ma = -k\Delta x + C \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^\gamma \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{L}\right)^\gamma - 1 \right]. \quad (5)$$

Korzystając z zależności wspomnianej w treści zadania mamy:

$$ma \approx -k\Delta x + C \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^\gamma \left[1 + \gamma \frac{\Delta x}{L} - 1 \right]. \quad (6)$$

Upraszczając otrzymane równanie otrzymujemy

$$ma = -k\Delta x + C \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^\gamma \gamma \frac{\Delta x}{L} = -k\Delta x + C \cdot \gamma \left(\frac{L}{l_0}\right)^{\gamma-1} \frac{\Delta x}{l_0}, \quad (7)$$

a następnie przekształcamy je do postaci równania oscylatora harmonicznego:

$$a = -\Delta x \left(\frac{k}{m} + \frac{\gamma C}{ml_0} \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^{\gamma-1} \right), \quad (8)$$

co pozwala obliczyć częstość drgań listewki z magnesem:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} + \frac{\gamma C}{ml_0} \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^{\gamma-1}. \quad (9)$$

Oznaczając częstość drgań układu bez pola magnetycznego od drugiego magnesu jako $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ oraz wprowadzając częstotliwość $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mamy

$$f^2 - f_0^2 = \frac{\gamma C}{4\pi^2 ml_0} \cdot \left(\frac{L}{l_0}\right)^{\gamma-1}. \quad (10)$$

Otrzymane równanie można przekształcić do postaci równania prostej poprzez obustronne zlogarytmowanie, uprzednio podzieliwszy je obustronnie przez wielkość 1 Hz^2 , aby uniknąć logarytmowania wielkości mianowanej (wielkości z jednostką fizyczną).

$$\log_{10} \left(\frac{f^2 - f_0^2}{1 \text{ Hz}^2} \right) = (\gamma - 1) \cdot \log_{10} \left(\frac{L}{l_0} \right) + \log_{10} \left(\frac{\gamma C}{4\pi^2 ml_0 \cdot 1 \text{ Hz}^2} \right). \quad (11)$$

Wykreślając wielkość $\log_{10} \left(\frac{f^2 - f_0^2}{1 \text{ Hz}^2} \right)$ w zależności od $\log_{10} \left(\frac{L}{l_0} \right)$ i dopasowując prostą do punktów doświadczalnych możemy wyznaczyć jej współczynnik kierunkowy równy

$$A = \gamma - 1, \quad (12)$$

a co za tym idzie wartość wykładnika γ :

$$\gamma = A + 1. \quad (13)$$

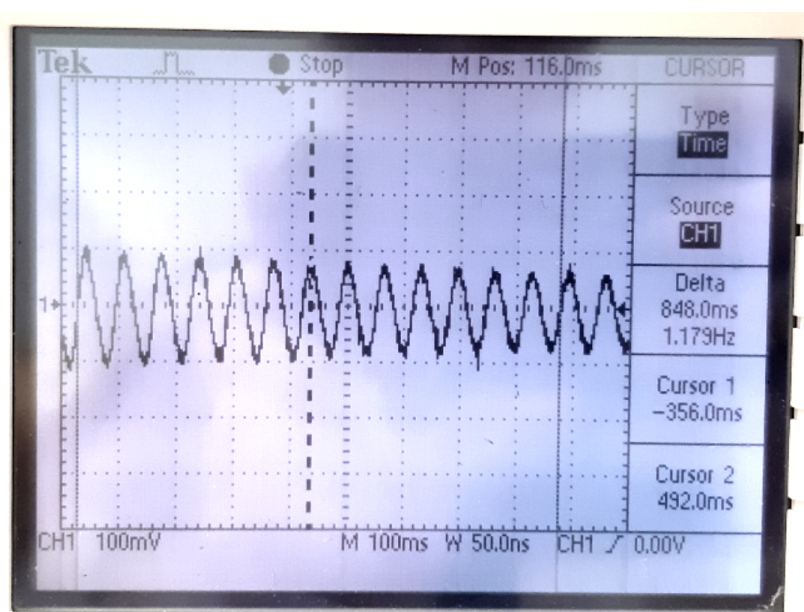
Realizacja doświadczalna

Układ eksperymentalny został zestawiony tak jak na Rys. 1. Cewkę stanowiło 50 zwojów drutu nawojowego, a jej średnica wynosiła około 30 mm. Cewkę podłączono bezpośrednio do oscyloskopu w pamięć przebiegu. Listewka z magnesem była zamocowana w imadle, natomiast drugi magnes przyklejono do większego z drewnianych klocków taśmą klejącą w taki sposób aby znajdował się on na tej samej wysokości co magnes na listewce. Cewkę przyklejono w płaszczyźnie pionowej do mniejszego z drewnianych klocków, a następnie klocek ustawiono w taki sposób, aby cewka była ustawiona współosiowo z magnesem, w niewielkiej odległości od niego.

Pomiary rozpoczęto od przypadku drgań swobodnych listewki z magnesem przy braku oddziaływania z drugim magnesem. W tym celu drugi magnes odsunięto od układu pomiarowego. Listewkę z magnesem wprowadzono w drgania a następnie po krótkiej chwili zatrzymano pomiar na oscyloskopie. Zatrzymanie pomiaru na oscyloskopie dokonywano w takim momencie, aby mierzone drgania magnesu były stosunkowo niewielkie (wychylenia rzędu 5 mm), jednak aby sygnał na oscyloskopie był wciąż mierzalny. Aby zmierzyć częstotliwość drgań, na oscyloskopie ustawiano kursor w połowie zbocza narastającego sygnału a następnie w połowie zbocza odległego o 13 okresów drgań (taka liczba drgań mieściła się w pełni na ekranie). Wybrane położenia kursora odpowiadają chwilom, kiedy siła elektromotoryczna indukowana w cewce jest równa zero, czyli chwili w której strumień indukcji magnetycznej w cewce jest stały, co oznacza, że magnes się nie porusza, a listewka z magnesem znajduje się w maksimum wychylenia.

Uwaga: Maksima i minima sygnału elektrycznego zarejestrowanego przez oscyloskop odpowiadają chwilom, kiedy szybkość zmiany strumienia indukcji magnetycznej w cewce jest największa. Ze względu na asymetryczne ustawienie cewki (bliżej jednego z maksimum wychylenia listewki z magnesem) taki moment nie następuje w chwili osiągnięcia maksymalnej prędkości listewki z magnesem, a raczej pomiędzy osiągnięciem minimum odległości magnesu od cewki a osiągnięciem maksimum prędkości listewki z magnesem. Moment ten zależy od (malejącej w trakcie pomiaru) amplitudy drgań listewki z magnesem, a zatem nie jest odpowiedni do określania okresu drgań.

Zdjęcie przykładowego przebiegu zaobserwowanego na oscyloskopie przedstawiono na rysunku 2. Pomiar



Rysunek 2: Zdjęcie przykładowego przebiegu zaobserwowanego na oscyloskopie. Pionowe przerywane linie oznaczają położenia dwóch maksimum przebiegu odległych o 13 okresów drgań.

czasu pełnych 13 drgań powtórzone pięciokrotnie, a wyniki przedstawiono w Tabeli 1.

Tabela 1: Zestawienie pomiarów wykonanych przy braku obecności drugiego magnesu.

Numer pomiaru	Czas trwania 13 okresów drgań (s)
1	0,876
2	0,880
3	0,880
4	0,876
5	0,876

Średnia wartość czasu trwania 13 drgań wyniosła $T = (0,8776 \pm 0,0012)$ s, co pozwala obliczyć częstotliwość $f_0 = (14,81 \pm 0,02)$ Hz. Niepewność pojedynczego pomiaru czasu oszacowano na podstawie rozrzutu danych przedstawionych w Tabeli 1 na jeden krok kursora oscyloskopu, czyli $u(f) = 0,004$ s.

Pomiary częstotliwości drgań przy oddziaływaniu z drugim magnesem przeprowadzono w analogiczny sposób, uprzednio przysuwając magnes przyklejony do drewnianego klocka w pobliże listewki z magnesem. Magnesy ustawiono współosiowo, a następnie zmierzono linijką odległość między ich środkami. Obserwację skali linijki przeprowadzano patrząc prostopadle, aby wyeliminować wpływ paralaksy. Niepewność odczytu odległości oszacowano na $u(L) = 1$ mm. Pomiar częstotliwości f powtórzono dla siedmiu różnych odległości L pomiędzy 5 cm a 10 cm. Wyniki pomiarów przedstawia Tabela 2.

Tabela 2: Zestawienie pomiarów wykonanych dla różnych odległości L .

L (cm)	$\log_{10}(L/l_0)$	T(s)	f(Hz)	$\log_{10}((f^2 - f_0^2)/(1 \text{ Hz}))$
4,3	0,633	0,796	16,33	1,67
4,8	0,681	0,828	15,70	1,43
5,4	0,732	0,848	15,33	1,19
6,1	0,785	0,860	15,12	0,96
7,0	0,845	0,868	14,98	0,69
7,9	0,898	0,872	14,91	0,45
8,9	0,949	0,872	14,91	0,45
9,9	0,996	0,876	14,84	-0,10

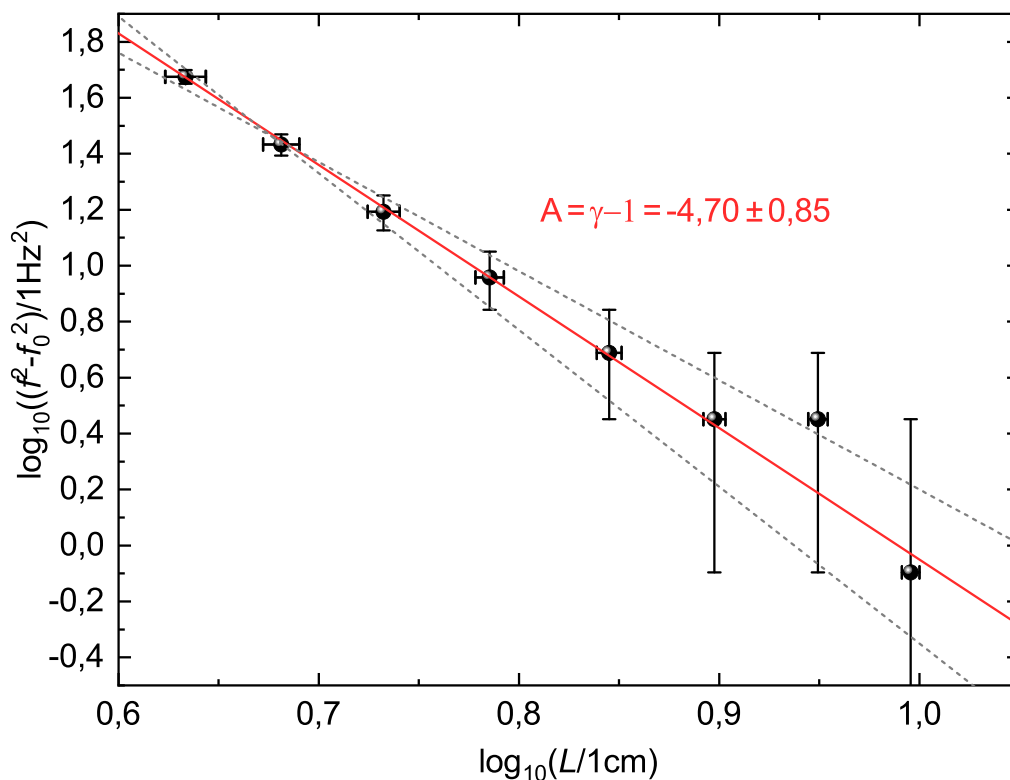
Do zebranych danych dopasowano zgodnie z równaniem 11, a prostą najlepszego dopasowania oraz proste o najmniejszym i największym nachyleniu pasujące do punktów pomiarowych. Odczytano wartość współczynnika kierunkowego

$$A = -4,70 \pm 0,85, \quad (14)$$

a następnie korzystając z równania 13 obliczono wykładnik γ :

$$\gamma = -3,70 \pm 0,85, \quad (15)$$

Komentarz 1: Zadanie to jest ilustracją zasady detekcji ultrasubtelnych zmian pola magnetycznego, którego źródłem są powierzchnie badanych próbek/kryształów, i które to zmiany podlegają pomiarom w Mikroskopie Sił Magnetycznych. Jest on pewną odmianą Mikroskopu Sił Atomowych. Oba wykorzystują do obrazowania powierzchni kryształów z rozdzielczością atomową różnicę w wielkości sił oddziaływania pomiędzy powierzchnią kryształu a końcówką próbnika mikroskopu – zaostrejonej igły czy piramidki, której atomy są przyciągane/odpychane w różny sposób przez atomy z różnych obszarów badanej powierzchni. Przesuwając bardzo precyzyjnie ową igłę nad badaną powierzchnią możemy odtworzyć mapę sił oddziaływania, a co za tym idzie i topografię powierzchni. Mikroskop Sił Magnetycznych, którego igła



Rysunek 3: Dopasowanie prostej do punktów pomiarowych.

jest magnetyczna rejestruje subtelne zmiany w jej oddziaływaniu magnetycznym z badaną powierzchnią, a metodą rejestracji jest analiza zmian częstotliwości drgań takiej igielki umieszczonej na drgającej nano-dźwigni, w obecności pola magnetycznego pochodzącego od badanego obszaru.

Komentarz 2: Dla odległości między magnesami znacznie większych niż ich wymiary, przewidziana teoretycznie wartość wykładnika γ wynosi -4 . W takim wypadku oddziaływanie dwóch magnesów można opisać jako oddziaływanie dwóch idealnych dipoli magnetycznych.

Punktacja:

Opis metody pomiaru f_0	2 pkt.
Opis metody pomiaru wykładnika γ wraz z wyprowadzeniem odpowiednich wzorów	6 pkt.
Opis układu doświadczalnego	2 pkt.
Kilkukrotnie powtórzony pomiar częstotliwości f_0	1 pkt.
Wykonanie co najmniej 5 pomiarów częstotliwości drgań dla różnych położenia magnesów	3 pkt.
Wyznaczenie f_0 wraz z niepewnością	2 pkt.
Wyznaczenie wykładnika γ oraz jego niepewności	4 pkt.