LXXII OLIMPIADA FIZYCZNA
ROZWIĄZANIA ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA
CZĘŚĆ I

ZADANIA CZĘŚCI I (termin wysyłania rozwiązań — 14 października 2022 r.)
Przy rozwiązywaniu wszystkich zadań możesz korzystać z Internetu,
pamiętaj jednak, że nie wszystkie znalezione tam informacje są prawdziwe.

CZĘŚĆ TESTOWA

Zadanie W1.

Teleskop kosmiczny Jamesa Webba ma wykonywać obserwacje w podczerwieni.

Jednym z powodów, dla którego te obserwacje będą prowadzone w podczerwieni jest:

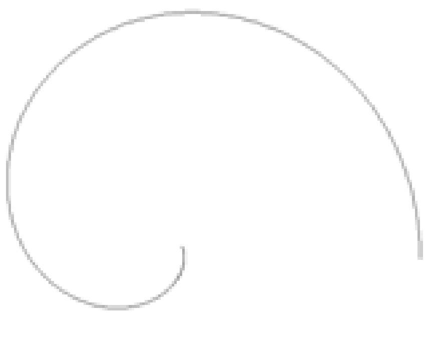
A. Dzięki temu można wykonywać obserwacje również w nocy, gdy jest ciemno
B. Zdjęcia wykonane w zakresie widzialnym nie mogą już nic wnieść do naszej wiedzy o Kosmosie
C. Promieniowanie podczerwone łatwiej niż widzialne przenika przez międzygwiezdne obłoki gazu i pyłu
D. Fotony promieniowania podczerwonego mają niższą energię niż fotony światła widzialnego, zatem wykorzystanie podczerwieni jest bardziej ekologiczne niż wykorzystanie światła widzialnego.

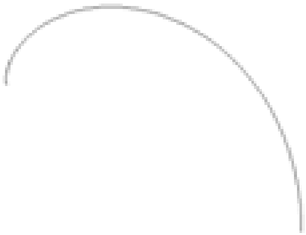
Rozwiązanie zadania W1: C.

Prawidłową odpowiedzią jest „promieniowanie podczerwone łatwiej niż widzialne przenika przez międzygwiezdne obłoki gazu i pyłu". Pozostałe odpowiedzi nie mają większego fizycznego sensu.

Zadanie W2.

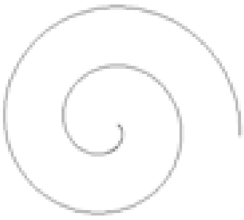
Cząstka o masie m i ładunku q wpada w prędkością v w obszar stałego pola magnetycznego o indukcji B. Podczas ruchu cząstki w tym obszarze działa na nią stała co do wartości siła oporu skierowana przeciwnie do wektora prędkości. Tor cząstki (aż do zatrzymania) dla pewnych wartości parametrów jest przedstawiony poniżej



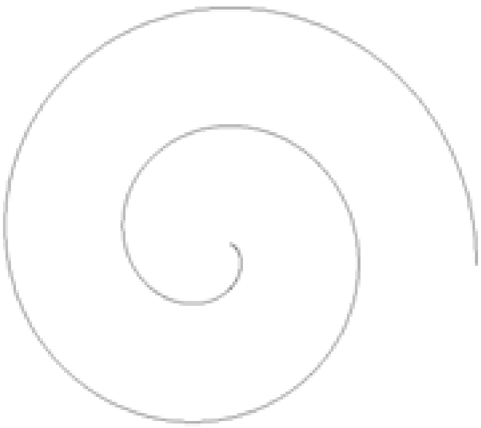


A.

B.



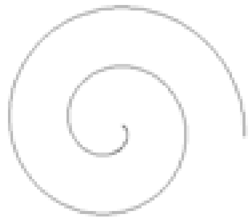
C.



D.

Rozwiązanie zadania W2: C.

Ponieważ siła oporu hamująca cząstkę jest stała i niezależna od B, zarówno czas ruchu cząstki jak i droga przez nią przebyta nie zależy od wartości B. Ponieważ wektor prędkości cząstki poruszającej się w stałym polu magnetycznym obraca się z prędkością kątową qB/m (patrz rozwiązanie zadania T3 z finału 71. Olimpiady Fizycznej), to jeśli pole B wzrosło dwukrotnie, to całkowity kąt, o jaki obróci się wektor prędkości wzrośnie również dwukrotnie. Torem spełniającym te dwa warunki jest tor



Zadanie W3.

Gdy pewną długą zwojnicę o liczbie zwojów n podłączono do baterii o napięciu U, to po krótkim czasie T (na tyle krótkim, że opór zwojnicy oraz opór wewnętrzny baterii można pominąć) indukcja pola magnetycznego wewnątrz zwojnicy wyniosła B. Następnie zwojnicę odłączono od napięcia i nawinięto na nią dodatkowo drut, tak, że całkowita liczba zwojów wzrosła do $2n$ bez istotnych zmian jej rozmiarów. Po ponownym podłączeniu jej do baterii o napięciu U, po takim samym jak poprzednio czasie T, indukcja pola magnetycznego wewnątrz zwojnicy wyniesie:

A. $2B$
B. $4B$
C. B
D. $B/2$
E. $B/4$
F. żadna z pozostałych wartości

Rozwiązanie zadania W3: D.

Indukcja B pola magnetycznego wewnątrz zwojnicy jest równa $\mu nI/h$, gdzie I jest natężeniem płynącego prądu, h – długością zwojnicy, a μ – przenikalnością magnetyczną próżni. Strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez jeden zwój jest równy $\Phi_1 = SB$, gdzie S jest przekrojem poprzecznym zwojnicy (powierzchnią otoczoną przez jeden zwój). Podłączenie baterii spowoduje. że przez zwojnicę zacznie płynąć prąd, czyli wzrośnie strumień indukcji pola magnetycznego. To, zgodnie z prawem Faradaya, generuje siłę elektromotoryczną. Na jednym zwoju taka wygenerowana siła elektromotoryczna jest równa

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = -\mu\frac{nS}{h}\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

gdzie $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ jest szybkością przyrostu natężenia prądu. Ponieważ mamy n zwojów, całkowita wyindukowana siła elektromotoryczna jest równa

$$\mathcal{E} = n\mathcal{E}_1 = -\mu\frac{n^2S}{h}\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Skoro pomijamy opór cewki i baterii, zachodzi $U + \mathcal{E} = 0$, czyli

$$U = \mu\frac{n^2S}{h}\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

a stąd

$$\Delta I = -\frac{U}{\mu n^2 S/h}\Delta t.$$

Ponieważ w chwili początkowej $t = 0$, $I = 0$, powyższe równanie oznacza, że

$$I = -\frac{U}{\mu_0 n^2 S/h} t,$$

a zatem

$$B = \frac{\mu_0 n}{h} I(t = T) = -\frac{U}{nS} T.$$

Czyli w rozważanej sytuacji indukcja pola magnetycznego zmaleje dwukrotnie.

Zadanie W4.

Amerykańscy naukowcy opracowali (niemal) idealnie białą farbę, odbijającą prawie całe promieniowanie z zakresu promieniowania widzialnego i pochłaniającą prawie całe promieniowanie z pozostałego zakresu (tzn. zachowującą się jak ciało doskonale czarne w pozostałym zakresie). Zgodnie z zapowiedziami, pomalowanie dachu domu taką farbą może wyeliminować konieczność stosowania klimatyzacji do chłodzenia wnętrza domu – lub przynajmniej ograniczyć jej moc. Wybierz najbardziej adekwatny komentarz:

a) takie działanie byłoby sprzeczne z II zasadą termodynamiki
b) taka farba rzeczywiście może obniżać temperaturę wewnątrz budynku, głównie w słoneczne, bezchmurne dni
c) taka farba rzeczywiście może obniżać temperaturę wewnątrz budynku, głównie w dni o całkowitym zachmurzeniu, ale o wysokiej temperaturze
d) efektywność działania takiej farby w celu obniżania temperatury nie jest wyższa, niż efektywność farby srebrnej/aluminiowej, odbijającej niezależnie od zakresu długości fali (niemal) całe promieniowanie,
e) taka farba obniża temperaturę wewnątrz budynku, pod (trudnym do spełnienia) warunkiem, że prawie całe niebo jest zachmurzone, ale chmury nie zasłaniają słońca

Przez „obniżanie temperatury" rozumiemy powyżej, że rozpatrywanej sytuacji temperatura wewnątrz domu w przypadku, gdy dach jest pomalowany rozważaną farbą jest niższa, niż gdyby był pomalowany farbą o innych właściwościach („zwykłą" farbą).

Rozwiązanie zadania W4: b.

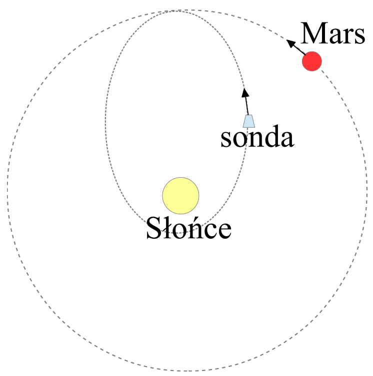
Aby farba spełniała swoją „chłodzącą" rolę, prócz odbijania promieniowania widzialnego, powinna wypromieniowywać więcej promieniowania cieplnego (czyli podczerwonego) niż pochłaniać go. Ponieważ chmury odbijają promieniowanie podczerwone (bezchmurne noce są znacznie zimniejsze niż noce w których niebo jest zachmurzone), oczekujemy największej efektywności w bezchmurne dni.

Oczywiście w szczególnych przypadkach, np. gdy rozważany dom jest otoczony przez wyższe od niego, nagrzane budynki, rozważany efekt „chłodzący" może nie występować.

Znacznie bardziej efektywnym rozwiązaniem niż malowanie dachu farbą, byłoby pokrycie go panelami fotowoltaicznymi i wykorzystanie wytworzonej energii elektrycznej do zasilania klimatyzacji. Byłoby to jednak zapewne znacznie droższe rozwiązanie.

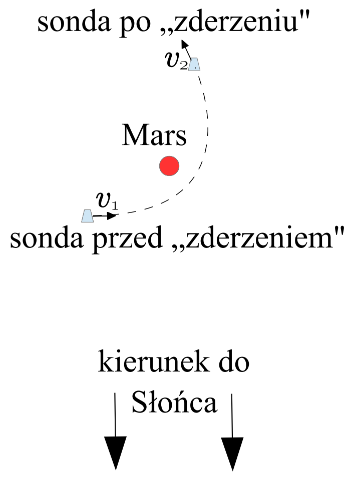
Zadanie W5.

„Katapulta” („proca”, „asysta”) grawitacyjna polega na wykorzystaniu oddziaływania grawitacyjnego jednej z planet do wysłania sondy w dalsze regiony Układu Słonecznego. Rozważmy sondę, której orbita w jednym punkcie zbliża się do orbity Marsa (patrz Rys. 5.1). Aby sonda mogła jak najbardziej oddalić się od Słońca, powinna się znaleźć w okolicy tego punktu jednocześnie z Marsem.



Rys. 5.1. Wokółsłoneczne orbity sondy oraz Marsa. Oddziaływanie sondy z Marsem nie jest uwzględnione.

Na Rys. 5.2 przedstawiono – **w układzie odniesienia Marsa** – przelot sondy w pobliżu Marsa (nazwany tu „zderzeniem”), wraz zaznaczonym wektorami prędkości sondy względem Marsa: przed „zderzeniem” ($\vec{v}_1$), oraz po „zderzeniu” ($\vec{v}_2$).



Rys. 5.2. Schematycznie przedstawiony w układzie Marsa przelot sondy w pobliżu Marsa.

Przez α oznaczymy kąt między tymi wektorami, przy czym dodatnia wartość α odpowiada prędkości $\vec{v}_2$ skierowanej „od Słońca” (jak na rysunku). W jednym i tylko w jednym przypadku spośród poniższych po oddziaływaniu z Marsem sonda wydostanie się poza Układ Słoneczny. W którym?

a) $\alpha = 90^{\circ}$
b) $\alpha = 30^{\circ}$
c) $\alpha = -40^{\circ}$
d) $\alpha = 160^{\circ}$

e) $\alpha = -170^o$

Przyjmij, że atmosfera Marsa i jego niezerowy promień nie mają wpływu na ruch sondy (tzn. że „zderzenie” jest sprężyste). Pomiń oddziaływanie innych ciał niż Słońce, Mars i sonda. Przyjmujemy, że sonda może przebywać w dwóch obszarach: takim, w którym oddziałuje ona tylko ze Słońcem, i drugim, znacznie mniejszym, w którym w układzie Marsa można zaniedbać oddziaływanie Słońca.

Rozwiązanie zadania W5: E.

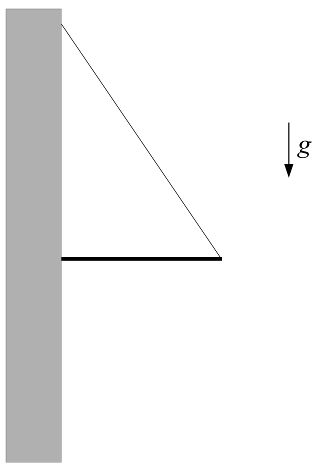
Sonda będzie mogła wydostać się poza Układ Słoneczny, jeśli osiągnie wystarczającą prędkość względem Słońca – i jest to jedyny warunek, jaki musi być spełniony. W wyniku „zderzenia” wartość prędkość sondy względem Marsa nie ulegnie zmianie, jednak zmiana wartości jej prędkości względem Słońca będzie tym większa, im większa będzie miara kąta między wektorami $\vec{v}_1$ oraz $\vec{v}_2$.

Zatem prawidłową odpowiedzią jest $\alpha = -170^o$ (to, że – przy przyjętej definicji – jest to kąt ujemny, nie ma tu znaczenia – po prostu początkowo sonda będzie zbliżała się do Słońca, ale następnie znowu zacznie się od niego oddalać).

CZĘŚĆ NUMERYCZNA

Zadanie N1.

Poziomy, jednorodny pręt o długości l jest zawieszony za jeden koniec na nieważkiej, wiotkiej linie, a drugi jego koniec opiera się o ścianę.



Odległość między punktem zawieszenia a punktem oparcia pręta jest równa h. Wyznacz minimalny współczynnik tarcia pręta o ścianę, przy którym taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie zadania N1.

Przymijmy, że naprężenie liny jest równe N. Pozioma składowa tego naprężenia to $Nl/\sqrt{l^2+h^2}$ i jest równa sile nacisku pręta na ścianę. A zatem maksymalna siła tarcia, działająca na koniec pręta stykający się ze ścianą wynosi $fNl/\sqrt{l^2+h^2}$. Pionowa składowa naprężenia liny to

$Nh/\sqrt{l^2+h^2}$. Ponieważ pręt się nie obraca, musi zachodzić

$$fN\frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}} = N\frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}},$$

Zatem

$$f = \frac{h}{l}.$$

Np. dla $h = 0{,}2$ m, $l = 0{,}4$ m otrzymamy $f = 0{,}5$.

Zadanie N2.

Zgodnie z prawem o ruchu drogowym wyrażony w metrach odstęp od poprzedzającego pojazdu powinien być równy co najmniej połowie prędkości samochodu wyrażonej w km/h. Zakładając czas reakcji T oraz prędkość obu pojazdów v, wyznacz, jaki musiałby być minimalny współczynnik tarcia opon o podłoże, aby w hipotetycznym przypadku, w którym poprzedzający pojazd zatrzymuje się w miejscu (np. zderza się z nieruchomą przeszkodą), samochód mógł się zatrzymać unikając zderzenia.

Pomiń opór powietrza i siły aerodynamiczne. Droga jest pozioma. Przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81$ m/s^2

Rozwiązanie zadania N2.

Wyrażony za pomocą wzoru wymagany odstęp d od poprzedzającego pojazdu jest równy

$$d = wv,$$

gdzie $w = 0{,}5$ m/ (km/h) $= 1{,}8$ s jest występującym w prawie o ruchu drogowym „przelicznikiem” prędkości na odległość. Ponieważ przyspieszenie przy współczynniku tarcia f wynosi fg, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, droga d_h przebyta podczas hamowania spełnia warunek

$$fgd_\mathrm{h} = \frac{1}{2}v^2.$$

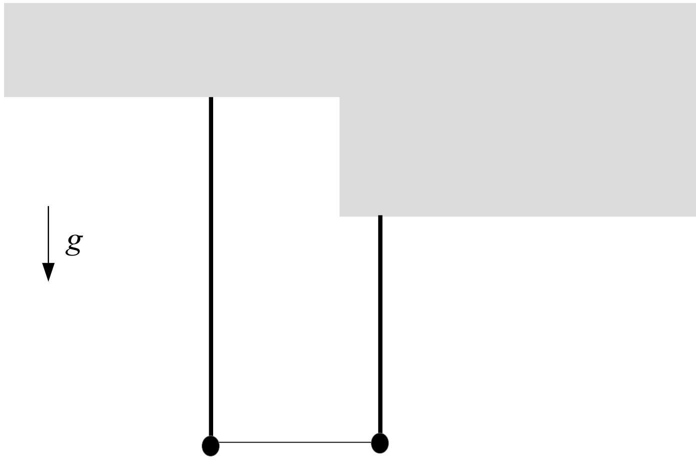
Zanim samochód zacznie hamować, przebędzie odległość vT, czyli $d_\mathrm{h} = d - vT$. Stąd

$$f = \frac{v}{2g\,(w-T)}.$$

Np. dla $v = 120$ km/h $= 33{,}3$ m/s, $T = 0{,}8$ m/s, otrzymamy $f = 1{,}7$. To jest znacznie więcej, niż „zwykły” współczynnik tarcia opon o drogę. Dopiero przy prędkości 50 km/h otrzymujemy „rozsądny” wymagany współczynnik tarcia $f = 0{,}71$.

Zadanie N3.

Dwa wahadła matematyczne o masach m_1 i m_2 oraz długościach l_1 i l_2 są zawieszone na różnych wysokościach. Masy są połączone nieważkim, sztywnym prętem, tak, że w stanie równowagi wahadła są pionowe, a pręt jest poziomy.



Wyznacz częstotliwość drgań układu w płaszczyźnie wyznaczonej przez równowagowe położenia wahadeł i pręta przy małych odchyleniach od położenia równowagi (takich, że można przyjąć $\sin\alpha = \alpha$, gdzie α jest kątem odchylenia wahadła od pionu).

Przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne g jest równe $g = 9{,}81$ m/s^2.

Rozwiązanie zadania N3.

W przybliżeniu $\sin\alpha = \alpha$, $\cos\alpha = 1$ pozioma składowa siły wypadkowej działającej na układ masy + pręt jest równa

$$F_x = -m_1 g\alpha_1 - m_2 g\alpha_2,$$

gdzie α_1, α_2 są kątami odchylenia odpowiednio wahadła 1 oraz wahadła 2 od pionu.

Mamy $\alpha_1 = x/l_1$, $\alpha_2 = x/l_2$, gdzie x jest poziomym przesunięciem każdej z mas. Zatem równanie ruchu ma postać

$$(m_1 + m_2)a_x = -m_1 g\frac{x}{l_1} - m_2 g\frac{x}{l_2},$$

gdzie a_x jest poziomą składową przyspieszenia układu. Stąd

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{m_1}{l_1} + \frac{m_2}{l_2}}{m_1 + m_2}g}.$$

Np. dla $m_1 = 0{,}1$ kg, $l_1 = 1$ m, $m_2 = 0{,}2$ kg, $l_2 = 0{,}25$ m otrzymamy $f = 0{,}863\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.

Zadanie N4.

Ściany czworościanu foremnego o boku a są utrzymywane w stałej temperaturze, odpowiednio T_1, T_2, T_3, T_4. Wewnątrz czworościanu jest kulka o promieniu r. środek kulki pokrywa się ze środkiem geometrycznym czworościanu. Między kulką a ścianami jest próżnia. Przyjmując, że zarówno kulka, jak i ściany są ciałami doskonale czarnymi, wyznacz temperaturę T_{k} kulki, jaka ustali się po długim czasie.

Wyszukaj w dostępnych Ci źródłach jak promieniuje i jak absorbuje promieniowanie ciało doskonale czarne.

Rozwiązanie zadania N4.

Każda ze ścian promieniuje energię proporcjonalnie do czwartej potęgi jej temperatury, zatem ze wzgledu na symetrię, do kulki dociera moc promieniowania $\alpha(T_1^4 + T_2^4 + T_3^4 + T_4^4)$, gdzie α jest pewną stałą. Kulka wypromieniowuje energię o mocy βT_k^4, gdzie β też jest stałą. W stanie równowagi musi zachodzić

$$\alpha(T_1^4 + T_2^4 + T_3^4 + T_4^4) = \beta T_\mathrm{k}^4.$$

W przypadku $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$ musi być $T_\mathrm{k} = T_1$, a zatem $\alpha = \beta/4$. Stąd

$$T_\mathrm{k} = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4 + T_3^4 + T_4^4}{4}}.$$

Np. dla $T_1 = 300$ K, $T_2 = 250$ K, $T_3 = 350$ K, $T_4 = 400$ K otrzymamy $T_\mathrm{k} = 339$ K.

Zadanie N5.

Pewnemu pacjentowi wstrzyknięto małą ilość roztworu zawierającego radioaktywny izotop sodu o całkowitej aktywności a rozpadów na minutę. Po 30 godzinach stwierdzono, że aktywność 1 cm^3 krwi tego pacjenta jest o a_2 rozpadów na minutę większa, niż przed wstrzyknięciem izotopu. Wiedząc, że czas połowicznego rozpadu rozważanego izotopu sodu wynosi 15 godzin i przyjmując, że sód nie jest usuwany z krwioobiegu, wyznacz objętość krwi w krwiobiegu pacjenta.

Rozwiązanie zadania N5.

Mamy

$$a_2 = 2^{-30/15}\frac{1\ \mathrm{cm}^3}{V},$$

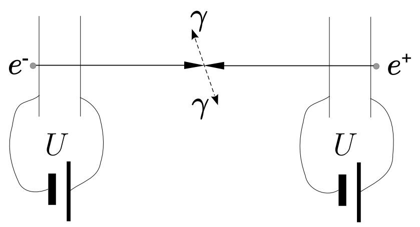
gdzie $2^{-30/15} = \frac{1}{4}$ jest ułamkiem początkowej ilości izotopu, jaki pozostanie po 30 godzinach. stąd

$$V = \frac{a}{4a_2} \cdot (1\ \mathrm{cm}^3).$$

Dla $a = 16000$, $a_2 = 0{,}8$ otrzymamy $V = 5000$ cm^3.

Zadanie N6.

Elektron (e^-) oraz pozyton (e^+) są przyspieszane za pomocą różnicy potencjałów U, a następnie zderzają ze sobą i anihilują, w wyniku czego powstaje para fotonów (2γ), patrz rysunek.



Rys. 6.1: Schematyczny rysunek przedstawiający opisaną w zadaniu sytuację.

Wyznacz długość fali tych fotonów. Przyjmij, że początkowa energia kinetyczna obu rozważanych cząstek jest zaniedbywalna w porównaniu z energią uzyskaną w wyniku tego przyspieszenia.

Masa elektronu (oraz pozytonu) jest równa $m_\mathrm{e} = 511$ keV$/c^2$, gdzie $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s jest prędkością światła, stała Planck'a $h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eV·s. 1 eV $= 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J.

Rozwiązanie zadania N6.

Całkowita energia układu elektron + pozyton w chwili zderzenia wynosi

$$E = 2\left(m_e c^2 + q_e U\right),$$

gdzie q_e jest wartością ładunku elektronu.

Energia ta jest równa energii dwóch powstałych fotonów $2E_\gamma$. Związek między długością fali fotonu, a jego energią jest dany wzorem

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}.$$

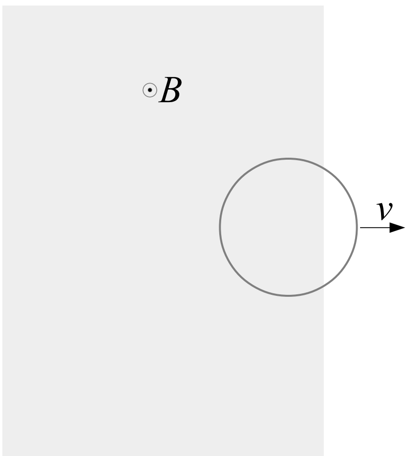
Stąd

$$\lambda = \frac{hc}{m_e c^2 + q_e U}.$$

Np. dla $U = 300$ kV ($U = 3{,}0\cdot 10^5$ V, $m_e = 5{,}11\cdot 10^5$ eV/c^2, $q_e = 1$ e) otrzymamy $\lambda = 1{,}5\cdot 10^{-12}$ m.

Zadanie N7.

Sztywna ramka w kształcie okręgu o promieniu r, wykonana z drutu o oporze całkowitym R jest wyciągana ze stałą prędkością v z obszaru (półprzestrzeni) o stałym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B, prostopadłym do tej ramki. Pole magnetyczne wytwarzane przez płynący w niej prąd można zaniedbać.



Wyznacz maksymalną wartość siły przeciwstawiającej się wyciąganiu tej ramki.

Rozwiązanie zadania N7.

Zgodnie z prawem Faradaya siła elektromotoryczna indukowana w ramce jest równa

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

gdzie $\Delta\Phi$ jest zmianą strumienia indukcji pola magnetycznego przechodzącego przez ramkę w krótkim czasie Δt.

Natężenie I prądu płynącego przez ramkę (przy pominięciu samoindukcji, czyli pola magnetycznego wytwarzanego przez ten prąd) jest równe

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Maksymalne I będzie, gdy środek okręgu będzie przekraczał granicę obszaru, w którym jest pole magnetyczne, czyli będzie wynosiło $I = B2rv/R$. Zauważmy, że wypadkowa siła działająca na ramkę jest równa IBl, gdzie l jest cięciwą łuku fragmentu ramki znajdującego się w polu magnetycznym. Ta cięciwa jest największa (i równa $2r$), gdy połowa ramki znajduje się w polu magnetycznym, czyli w tym samym momencie, gdy I jest największe. Zatem szukana maksymalna siła jest równa

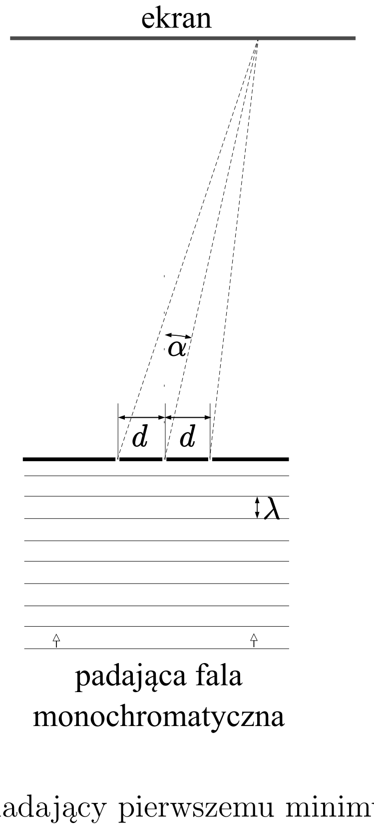
$$F_{\max} = BI \cdot 2r = \frac{4B^2r^2v}{R}.$$

Ten wynik można też otrzymać z rozważań energetycznych: ciepło Joule'a I^2R wydzielane w obwodzie jest równe $F \cdot v$, gdzie F jest siłą przeciwstawiającą się wyciąganiu ramki. Zatem $F = I^2R/v$; maksymalną wartość otrzymamy dla maksymalnego I, co prowadzi do powyższego wzoru na $F_{\max}$.

Dla $B = 0{,}01$ T, $r = 0{,}1$ m, $v = 10$ m/s, $R = 0{,}01\ \Omega$ otrzymamy $F_{\max} = 0{,}004$ N.

Zadanie N8.

W płaskiej przegrodzie znajdują się trzy równoodległe, cienkie szczeliny o identycznej szerokości i grubości. Odległość między sąsiednimi szczelinami wynosi d. Na przegrodę pada prostopadle monochromatyczna fala o długości fali λ. Na ekranie znajdującym się w odległości znacznie większej od d można zaobserwować prążki interferencyjne.



Wyznacz kąt odchylenia α odpowiadający pierwszemu minimum interferencyjnemu.

Rozwiązanie zadania N8.

Jeśli s jest drogą przy przejściu przez środkową szczelinę, to drogi odpowiadające przejściu światła przez pozostałe szczeliny wynoszą $l - d\sin\alpha$ oraz $l + d\sin\alpha$, gdzie α jest kątem odchylenia. Zatem amplituda natężenie światła w punkcie obserwacji jest proporcjonalna do

$$\cos\left(2\pi\frac{l-d\sin\alpha}{\lambda}-\omega t\right)+\cos\left(2\pi\frac{l}{\lambda}-\omega t\right)+\cos\left(2\pi\frac{l+d\sin\alpha}{\lambda}-\omega t\right)$$
$$=\cos\left(2\pi\frac{l}{\lambda}-\omega t\right)\left(1+2\cos\frac{2\pi d\sin\alpha}{\lambda}\right),$$

gdzie ω jest częstością drgań światła, a t – czasem.

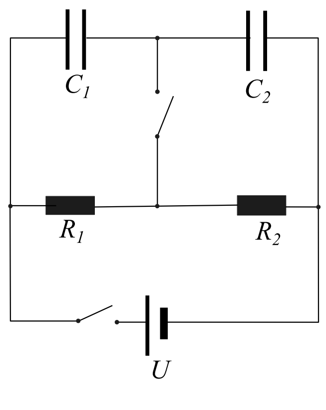
Minimum będzie, gdy $1+2\cos\frac{2d\sin\alpha}{\lambda}=0$, czyli pierwsze minimum wystąpi dla $\frac{d\sin\alpha}{\lambda}=\frac{2\pi}{3}$, co daje

$$\sin\alpha=\frac{1}{3}\frac{\lambda}{d},$$
$$\alpha=\arcsin\frac{1}{3}\frac{\lambda}{d}.$$

Np. dla $\lambda = 500$ nm, $d = 2116$ nm otrzymamy $\alpha = 7{,}88\cdot 10^{-2}$ (rad) $= 4{,}52^{\circ}$.

Zadanie N9.

Rozważmy układ dwóch oporników o oporach R_1, R_2, dwóch kondensatorów o pojemnościach C_1, C_2 i baterii o napięciu U oraz zaniedbywalnym oporze wewnętrznym – patrz rysunek.



Początkowo oba klucze były zamknięte – układ był podłączony do baterii przez czas pozwalający na ustabilizowanie się napięć i ładunków na elementach układu. W pewnej chwili oba klucze zostały jednocześnie otwarte. Wyznacz napięcie U_1 na kondensatorze C_1 po długim czasie (tzn. takim, że zmiany tego napięcia są pomijalne).

Przyjmij ładunek zgromadzony na nich nie zmienia się w czasie, jeśli nie są podłączone do zewnętrznego oporu (tzn. że tzw. upływność kondensatorów jest pomijalna).

Rozwiązanie zadania N9.

W początkowej sytuacji napięcie na kondensatorach wynosi

$$U_{10} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U,$$
$$U_{20} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U.$$

stąd ładunki na kondensatorach

$$Q_{10} = C_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} U,$$
$$Q_{20} = C_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} U.$$

Całkowity ładunek na bezpośrednio połączonych okładkach kondensatorów to

$$Q = Q_{20} - Q_{10} = \frac{C_2 R_2 - C_1 R_1}{R_1 + R_2} U.$$

Ten ładunek nie ulegnie zmianie; natomiast w stanie końcowym (U_2 jest końcowym napięciem na kondensatorze C_2; Q_1, Q_2 końcowymi napięciami na odpowiednich kondensatorach)

$$U_1 + U_2 = 0,$$
$$Q_1 = C_1 U_1,$$
$$Q_2 = C_2 U_2,$$

stąd

$$C_2 U_2 - C_1 U_1 = -(C_1 + C_2) U_1 = Q.$$

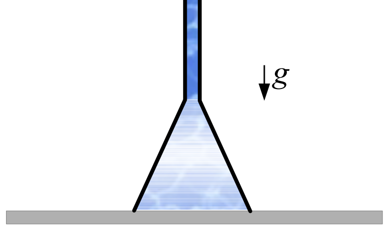
Zatem

$$U_1 = -\frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 R_1 - C_2 R_2}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)} U.$$

Np. dla $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 20$ kΩ, $C_1 = 20$ mF, $C_2 = 30$ mF, otrzymamy $U_1 = -1{,}2$ V.

Zadanie N10.

Stożkowy lejek o masie m, maksymalnym promieniu R, minimalnym promieniu znacznie mniejszym od R, wysokości części lejkowatej h, jest zakończony bardzo długą, cienką rurką. Lejek postawiono szerszym końcem na gładkim, poziomym stole.



Do jakiej maksymalnej wysokości H, mierzonej od stołu, można nalać wodę do lejka, aby nie wyciekła ona na stół? Granica lejek – stół jest szczelna, ale lejek nie przykleja się do stołu.

Wiadomo, że $H \geqslant h$. Napięcie powierzchniowe jest pomijalne. Gęstość wody jest równa $\rho = 1$ g/cm^3.

Rozwiązanie zadania N10.

Całkowita siła F, z jaką woda podnosi lejek (czyli siła parcia wody działająca na lejek) jest równa sile reakcji stołu na nacisk wody (równej sile parcia wody na stół) pomniejszonej o ciężar tej wody

$$F = \pi R^2 p - m_{\mathrm{rw}} g,$$

gdzie $m_{\mathrm{rw}} = \pi R^2 h\rho/3$ jest masą wody, $p = g\rho H$, jest ciśnieniem wody (g to przyspieszenie ziemskie) na poziomie stołu. Stąd

$$F = \pi R^2 g\rho H - \pi R^2 h\rho g/3.$$

Zatem z warunku $F = mg$ wynika

$$H = \frac{m + \pi R^2 h\rho/3}{\pi R^2 \rho} = \frac{m}{\pi R^2 \rho} + \frac{h}{3}.$$

Np. dla $R = 5$ cm, $h = 10$ cm, $m = 600$ g otrzymamy $H = 11{,}0$ cm, dla $R = 3$ cm, $h = 6$ cm, $m = 800$ g otrzymamy $H = 30{,}3$ cm