

LXXII OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA

CZEŚĆ II

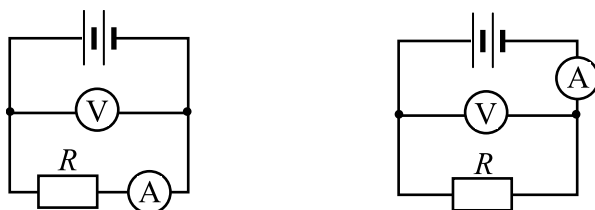
ZADANIA CZEŚCI II (termin wysyłania rozwiązań — 19 listopada 2022 r.)

ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1.

Pewien układ elektroniczny mierzy napięcie w zakresie od 0 V do U_0 i ma stały opór R_0 . Dołączając do niego w odpowiedni sposób (szeregowo lub równolegle) pewien opornik utworzono z niego woltomierz o zakresie pomiarowym do U_V ($U_V > U_0$). Z drugiego takiego samego układu elektronicznego, przez dołączenie w odpowiedni sposób innego opornika, utworzono amperomierz o zakresie pomiarowym do I_A . W celu wyznaczenia wartości oporu R pewnego elementu dokonano tymi przyrządami pomiaru napięcia i natężenia prądu w dwóch przedstawionych na rysunkach obwodach.

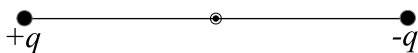


Iloraz wskazań mierników U/I okazał się równy R_1 w jednym z obwodów, a R_2 w drugim, przy czym $R_2 > R_1$. Ustal, któremu obwodowi odpowiada R_1 , a któremu R_2 i wyznacz R_0 oraz R .

Podaj wyniki liczbowe dla $U_0 = 0,5$ V, $U_V = 100$ V, $I_A = 0,2$ A, $R_1 = 450$ Ω , $R_2 = 460$ Ω .

Zadanie T2.

W pobliżu nieskończonej metalowej płyty znajduje się cienki, sztywny, jednorodny pręt o długości $2l$, na końcach którego umieszczone są dwie małe kulki o masie m każda, naładowane ładunkami: $+q$ oraz $-q$. Środek pręta jest zamocowany w stałej odległości d ($d > l$) od płyty, ale pręt może się swobodnie obracać wokół tego punktu zamocowania, patrz rysunek.

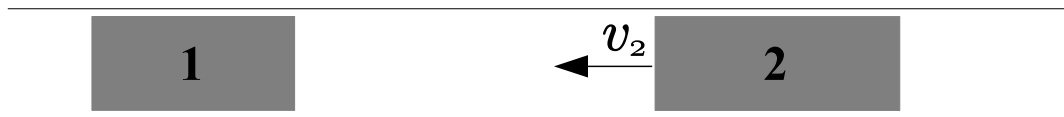


Początkowo pręt był nieruchomy i równoległy do metalowej płyty. W wyniku małego odchylenia od położenia początkowego pręt zaczął się obracać w płaszczyźnie prostopadłej do płyty. Wyznacz prędkość kulek na końcach pręta w chwili, gdy będzie on prostopadły do płyty. Pomiń opory ruchu. Możesz przyjąć, że płyta jest idealnym przewodnikiem. Pręt i mocowanie jego środka nie ma wpływu na pole elektryczne.

Wskazówka: patrz logo Olimpiady Fizycznej ilustrujące zastosowanie tzw. „metody obrazów” (zad 2. I st. cz. 2, LXVII Olimpiady Fizycznej).

Zadanie T3.

Wewnątrz bardzo długiego cylindra znajdują się dwa szczelne tłoki o masach m_1 i m_2 oraz polu przekroju S . Między nimi jest zamknięta pewna ilość gazu.

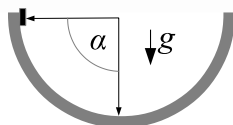


Początkowa odległość między tłokami wynosiła L_0 ; tłok 1 spoczywał, a tłok 2 poruszał się z pewną (nieznaną) prędkością v_2 w kierunku tłoka 1. Początkowe ciśnienie gazu między tłokami było równe ciśnieniu zewnętrznemu p_0 , a początkowa temperatura wynosiła T_0 . Gaz jest gazem doskonałym o molowym cieple właściwym C_V . Przyjmując, że tłoki ani cylinder nie pobierają ciepła od gazu, oraz że sprężanie oraz rozprężanie gazu pomiędzy tłokami zachodzi w sposób odwracalny i wiedząc, że minimalna odległość między tłokami wyniosła L_{\min} , wyznacz prędkość v_2 .

Pomiń opór aerodynamiczny związany z ruchem tłoków i tarcie tłoków o ścianki cylindra oraz masę gazu w porównaniu z masą tłoków.

Zadanie T4 - numeryczne.

Tuż przy brzegu poziomej rynny (półwalca) o promieniu wewnętrznym $r = 0,1$ m umieszczono mały klocek (tzn. o rozmiarach znacznie mniejszych od r) i puszczono.



Współczynnik tarcia klocka o powierzchnię rynny jest równy f . Pomijając opór powietrza i przyjmując, że klocek styka się z rynną stale tą samą ścianą (tzn. nie przewraca się), wyznacz numerycznie ruch klocka (kąt α – patrz rysunek – w zależności od czasu) w zakresie czasów od 0 s (chwila położenia klocka) do 10 s oraz – jeśli klocek zatrzyma się w ciągu 10 s – chwilę zatrzymania się klocka.

Rozważ następujące współczynniki tarcia f : a) 0; b) 0,02; c) 0,1; d) 0,5. W każdym przypadku wykonaj wykres $\alpha(t)$.

Dodatkowo wyznacz wartość współczynnika tarcia f , przy której klocek bez przekraczania środka rynny, zatrzyma się na tym środku.

Uwaga:

Rozwiązanie powinno zawierać:

- (i) wzory używane w rozwiązaniu wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem;
- (ii) opis zastosowanego algorytmu;
- (iii) opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz z sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników;
- (iv) wykresy oraz wartości liczbowe, o których mowa w treści zadania
- (v) jakościowe omówienie otrzymanych wyników.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub gotowych programów wyznaczających poszukiwany czas po podaniu toru.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Należy przesłać rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde z zadań doświadczalnych można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Zadanie D1.

Moment siły niezbędny do skrócenia względem siebie dwóch podstaw jednorodnego walca o kąt α wokół osi walca, wynosi:

$$T = \alpha \frac{JG}{L},$$

przy czym L oznacza długość walca, G oznacza moduł Kirchhoffa materiału, z którego był wykonany walec, a J oznacza tak zwany geometryczny moment bezwładności przekroju walca.

Geometryczny moment bezwładności koła o promieniu r jest równy:

$$J = \frac{1}{2}\pi r^4.$$

Masz do dyspozycji:

- drut miedziany o średnicy 0,1 mm,
- makaron spaghetti (nieugotowany),
- wagę kuchenną o rozdzielczości 1 g,
- stoper,
- linijkę,
- statyw,
- taśmę klejącą.

Wyznacz moduł Kirchhoffa miedzi.

UWAGA 1: Jeśli nie posiadasz wagi kuchennej, możesz wykorzystać informację o masie netto na opakowaniu makaronu.

UWAGA 2: Jeśli nie możesz zdobyć samodzielnie drutu, prześlij do 21 października na adres KGOF zaadresowaną do siebie kopertę ze znaczkami. KGOF odeśle Ci drut.

Zadanie D2.

Masz do dyspozycji:

- smartfon z akcelerometrem oraz z aplikacją umożliwiającą rejestrowanie i zapisywanie wektora przyspieszenia smartfonu,
- krawiecką taśmę mierniczą,
- wagę łazienkową,
- taśmę klejącą.

Wyznacz maksymalną chwilową moc mechaniczną mięśni swoich nóg (albo nóg wybranej osoby) podczas pionowego skoku z miejsca.

WSKAZÓWKA: Przykładowa aplikacja działająca w systemach operacyjnych Android oraz iOS, umożliwiająca zapis zebranych danych pomiarowych do pliku: „phyphox” (<https://phyphox.org/>).

UWAGA 1: Zwróć uwagę, jaką wielkość fizyczną wyświetla aplikacja, której używasz. Smartfony wyposażone są w akcelerometr opierający się na pomiarze siły działającej na element czujnika. W przypadku spoczywającego smartfonu wynikiem pomiaru jest wektor przyspieszenia ziemskiego.

Często jednak smartfony wyświetlają przyspieszenie telefonu względem układu związanego z powierzchnią ziemi. Ta wielkość jest obliczana na podstawie wskazań akcelerometru oraz orientacji telefonu, otrzymanej z wskazań żyroskopu (miernika przyspieszenia kąтового).

UWAGA 2: Analizę zebranych danych, niezbędne obliczenia oraz wykresy możesz wykonać przy użyciu komputera. Rozwiązanie powinno wtedy zawierać również opis zastosowanego algorytmu oraz opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania.

Zadanie D3.

Masz do dyspozycji:

- baterię alkaliczną typu LR03 (AAA),
- woltomierz,
- trzy oporniki o oporze $10\ \Omega$ każdy,
- przewody połączeniowe, na przykład ze złączem krokodylkowym, niezbędne do zestawienia układu pomiarowego.

W pewnym zakresie wartości natężenia prądu płynącego przez baterię zależność napięcia U baterii od płynącego przez nią prądu I jest liniowa:

$$U = \varepsilon - I \cdot R_w,$$

gdzie ε - siła elektromotoryczna, a R_w - opór wewnętrzny baterii. Wyznacz ε oraz R_w .

UWAGA 1: Nie dopuszczaj do przepływu prądu przez baterię przez długi czas. Parametry baterii mogą się zmieniać, np. w wyniku jej nagrzewania.

UWAGA 2: Jeśli nie możesz zdobyć samodzielnie oporników, prześlij do 21 października na adres KGOF zaadresowaną do siebie kopertę ze znaczkami. KGOF odeśle Ci kilka oporników.

ROZWIĄZANIA

Rozwiązanie zadania T1

Aby zwiększyć zakres woltomierza z U_0 do U_V , należy dołączyć do niego opornik szeregowo, żeby napięcie U_V podzieliło się na napięcie na tym oporniku oraz na wyjściowym elemencie

pomiarowym. Ponieważ przez oba elementy płynie ten sam prąd, spełnione jest równanie

$$\frac{U_0}{R_0} = \frac{U_V}{R_V}, \quad (1)$$

gdzie R_V jest oporem (całego) woltomierza.

W celu utworzenia amperomierza o odpowiednio dużym zakresie I_A należy do elementu pomiarowego dołączyć opornik równolegle, a ponieważ wtedy napięcia na obu elementach są jednakowe, spełnione jest równanie

$$U_0 = I_A R_A, \quad (2)$$

gdzie R_A jest to opór amperomierza (wyjściowego układu elektronicznego wraz z opornikiem), który możemy wyznaczyć z powyższego równania.

Analizując oba przedstawione obwody stwierdzamy, że w lewym mierzony jest faktycznie opór szeregowo połączonych zespołu „opornik + amperomierz”, a opór woltomierza nie jest istotny; natomiast w prawym mierzy się opór równoległego zespołu „opornik + woltomierz”, a opór amperomierza się nie liczy. Ponieważ w połączeniu szeregowym opór jest większy, więc widać, że wartość R_1 zmierzono w prawym obwodzie, a R_2 w lewym. Zatem

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}, \quad (3)$$

$$R_2 = R + R_A \quad (4)$$

Z równań (2) i (4) wyznaczamy R

$$R = R_2 - R_A = R_2 - \frac{U_0}{I_A}. \quad (5)$$

Teraz z równania (3) możemy obliczyć R_V

$$R_V = \frac{R R_1}{R - R_1}, \quad (6)$$

a na koniec z równania (1) R_0

$$R_0 = R_V \frac{U_0}{U_V}. \quad (7)$$

W jawnej postaci

$$R_0 = \left(R_2 - \frac{U_0}{I_A} \right) \frac{R_1}{R_2 - \frac{U_0}{I_A} - R_1} \frac{U_0}{U_V} \quad (8)$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy

$$R_0 \approx 137,3 \, \Omega, \quad (9)$$

$$R \approx 457,5 \, \Omega. \quad (10)$$

Punktacja zadania T1.

Przedstawienie sposobu uzyskania woltomierza o zakresie do U_V 1 pkt.

Przedstawienie sposobu uzyskania amperomierza o zakresie do I_A 1 pkt.

Ustalenie, że wartość R_1 zmierzono w prawym obwodzie, a R_2 w lewym 1 pkt.

Wyznaczenie R (wzór (5) lub równoważny)	2 pkt.
Opór woltomierza R_V (wzór (5) lub równoważny)	1 pkt.
Wzór na R_0 (wzór (7) lub równoważny)	1 pkt.
Jawny wzór na R_0 (wzór (8) lub równoważny)	1 pkt.
Wartość liczbową R_0 (wzór (9))	1 pkt.
Wartość liczbową R (wzór (10))	1 pkt.

Rozwiązanie zadania T2

Metalowa płyta musi mieć potencjał równy zero (czyli taki, jak w „nieskończoności”), co oznacza, że pole elektryczne po tej stronie płyty, gdzie jest pręt, jest takie, jakby było sumą pól elektrycznych pochodzących od rzeczywistych ładunków (ładunki na kulkach połączonych z prętem) oraz ładunków „obrazowych”, będących odbiciem lustrzanym (względem płyty, z zamianą znaków ładunków na przeciwne - nazywa się to „metodą obrazów”) rzeczywistych ładunków. W ten sposób potencjały od ładunków rzeczywistych i ładunków obrazowych dla dowolnego punktu na płaszczyźnie płyty się redukują (zasada superpozycji) i potencjał na całej tej płaszczyźnie pozostaje stały, dając poprawny rozkład potencjału w przestrzeni. Gdy położenie rzeczywistych ładunków ulegnie zmianie, to odpowiedniej zmianie ulegnie również położenie ładunków obrazowych. To oznacza, że rozpatrywana sytuacja, jest (z punktu widzenia obszaru „przed” płytą) równoważna sytuacji, gdy zamiast płyty mamy rzeczywisty pręt i rzeczywiste ładunki będące lustrzanym odbiciem prawdziwych ładunków względem płaszczyzny płyty.

Energia początkowa takiego układu jest równa energii elektrostatycznej,

$$E_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{2d} + \frac{2}{\sqrt{4d^2 + 4l^2}} \right) + 2E_K, \quad (11)$$

gdzie E_K energią oddziaływania kulek znajdujących się po tej samej stronie płaszczyzny płyty.

Końcowa energia elektrostatyczna rozważanego układu jest równa

$$E_{1el} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2d-2l} - \frac{1}{2d+2l} + \frac{2}{2d} \right) + 2E_K, \quad (12)$$

zatem uwzględniając, że końcowa energia kinetyczna wszystkich czterech kulek wynosi $4\frac{1}{2}mv^2$, całkowita energia końcowa jest równa

$$E_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2d-2l} - \frac{1}{2d+2l} + \frac{2}{2d} \right) + 2E_K + 4\frac{1}{2}mv^2, \quad (13)$$

Ponieważ pomijamy opory, energia jest zachowana, czyli $E_0 = E_1$ i otrzymujemy

$$v = \sqrt{\frac{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{d} + \frac{1}{\sqrt{d^2+l^2}} + \frac{1}{2d-2l} + \frac{1}{2d+2l} \right)}{2m}}. \quad (14)$$

Uwaga: zamiast rozpatrywać energię układu równoważnego, można rozważać rzeczywistą energię układu. Zauważmy, że za płytą (po drugiej stronie „lustra”) pole elektryczne jest równe 0 – przewodząca płyta całkowicie ekranuje ładunki. Ponieważ energia elektrostatyczna jest związana z polem elektrycznym, a pole elektryczne jest tylko po jednej stronie płyty, prawdziwa początkowa energia elektrostatyczna układu jest połową wyznaczonej powyżej energii E_0 , a prawdziwa

końcowa energia elektrostatyczna jest połową wyznaczonej powyżej energii E_{1el} . Ponieważ mamy tylko dwa rzeczywiste ładunki, prawdziwa całkowita energia końcowa układu jest równa $\frac{1}{2}E_{1el} + 2\frac{1}{2}mv^2$. Zatem zasada zachowania energii przyjmie postać

$$\frac{E_0}{2} = \frac{E_{1el}}{2} + 2\frac{1}{2}mv^2,$$

co prowadzi do tego samego wyniku (14).

Punktacja zadania T2.

Zauważenie, że pole elektryczne układu (po stronie ładunków) można uzyskać dodając ładunki obrazowe po przeciwnej stronie płyty wraz z opisem położenia i wartości tych ładunków 2 pkt.

Początkowa energia elektrostatyczna układu równoważnego (wzór (11) lub równoważny) lub rzeczywista początkowa energia elektrostatyczna (połowa wartości danej wzorem (11) lub równoważnym) 2 pkt

Końcowa energia elektrostatyczna układu równoważnego (wzór (13) lub równoważny) lub rzeczywista końcowa energia elektrostatyczna (połowa wartości danej wzorem (12) lub równoważnym) 2 pkt

Energia kinetyczna kulek ($4\frac{1}{2}mv^2$ w przypadku „równoważnym” lub $2\frac{1}{2}mv^2$ w przypadku rzeczywistym) 1 pkt.

Skorzystanie z zasady zachowania energii (nawet jeśli energia kinetyczna nie jest zgodna z rozpatrywanym podejściem) 1 pkt.

Szukana prędkość (wzór (14) lub równoważny) 2 pkt.

Rozwiązanie zadania T3

W chwili największego zbliżenia tłoki nie poruszają się względem siebie, a zgodnie z zasadą zachowania pędu ich prędkość wynosi

$$v = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (15)$$

Energia początkowa jest równa sumie energii kinetycznej tłoków (w tym przypadku tylko tłok 2 się porusza) $\frac{m_2}{2}v_2^2$, energii wewnętrznej gazu pomiędzy tłokami $nC_V T_0$, gdzie n jest liczbą moli gazu pomiędzy tłokami, oraz energii gazu na zewnątrz tłoków E_z

$$E_{pocz} = \frac{m_2}{2}v_2^2 + nC_V T_0 + E_z. \quad (16)$$

Energia układu w chwili największego zbliżenia jest również sumą energii kinetycznej tłoków, energii wewnętrznej gazu pomiędzy tłokami oraz energii gazu na zewnątrz tłoków; ta ostatnia zmniejszy się w porównaniu z E_z o pracę wykonaną przez ciśnienie zewnętrzne, równą $(L_0 - L_{min})Sp_0$. Zatem energia układu w chwili największego zbliżenia jest równa

$$E_{zbl} = \frac{m_1 + m_2}{2}v^2 + nC_V T_1 + E_z - (L_0 - L_{min})Sp_0. \quad (17)$$

Z warunków zadania wynika, że

$$E_{pocz} = E_{zbl}. \quad (18)$$

Zgodnie z podanymi założeniami przemiana gazu jest adiabatyczna, czyli obowiązuje równanie

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (19)$$

gdzie $\gamma = \frac{C_V + R}{C_V}$, a p , V są ciśnieniem i objętością gazu pomiędzy tłokami. Uwzględniając równanie stanu $pV = nRT$ dostajemy postać równania adiabaty w zmiennych $T - V$

$$TV^{\gamma-1} = TV^{R/C_V} = \text{const}. \quad (20)$$

Objętość gazu jest proporcjonalna do odległości między tłokami, zatem temperatura gazu w chwili największego zbliżenia jest równa

$$T_1 = T_0 \left(\frac{L_0}{L_{\min}} \right)^{\gamma-1}. \quad (21)$$

Uwzględniając powyższe, z warunku $E_{\text{pocz}} = E_{\text{zbl}}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \left(m_2 - (m_1 + m_2) \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right) v_2^2 = n c_V \left(\left(\frac{L_0}{L_{\min}} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) T_0 - (L_0 - L_{\min}) S p_0. \quad (22)$$

Z równania stanu gazu doskonałego liczba moli gazu pomiędzy tłokami jest równa

$$n = \frac{p_0 L_0 S}{RT_0}. \quad (23)$$

Z równań (22) oraz (23) otrzymujemy szukaną prędkość

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2) S p_0}{m_1 m_2} \left[\frac{C_V L_0}{R} \left(\left(\frac{L_0}{L_{\min}} \right)^{\frac{R}{C_V}} - 1 \right) - (L_0 - L_{\min}) \right]}. \quad (24)$$

Punktacja zadania T3.

Prędkość tłoków w chwili ich największego zbliżenia (wzór (15) lub równoważny) 1 pkt.
 Energia początkowa układu (wzór (16) lub równoważny) 1 pkt.
 Energia w chwili największego zbliżenia tłoków (wzór (17) lub równoważny) 2 pkt.
 Temperatura gazu w chwili największego zbliżenia (wzór (17) lub równoważny) 2 pkt.
 Liczba moli gazu pomiędzy tłokami (wzór (23) lub równoważny) 1 pkt.
 Wykorzystanie zasady zachowania energii 1 pkt.
 Szukana prędkość (wzór (24) lub równoważny) 2 pkt.

Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

1. Rozważania fizyczne

Ponieważ początkowo klocek spoczywa, a rynna jest pozioma, ruch będzie się odbywał tylko w płaszczyźnie prostopadłej do osi rynny. Zatem ograniczymy się tylko do takiej płaszczyzny.

Składowa styczna do rynny F_s siły działającej na klocek jest sumą odpowiedniej składowej siły ciężkości $-mg \sin \alpha$ oraz siły tarcia T

$$F_s = -mg \sin \alpha + T. \quad (25)$$

gdzie α jest kątem odpowiadającym położeniu klocka w rynnie - tak jak na rysunku w treści zadania.

Normalna w danym punkcie składowa F_n siły działającej na równię jest równa różnicy siły reakcji rynny R oraz normalnej do rynny składowej siły ciężkości $mg \cos \alpha$

$$F_n = R - mg \cos \alpha.$$

Gdy klocek porusza się z prędkością v , to ponieważ porusza się po okręgu o promieniu r , jego przyspieszenie dośrodkowe wynosi v^2/r , a zatem zachodzi

$$F_n = m \frac{v^2}{r},$$

a stąd

$$R = mg \cos \alpha + m \frac{v^2}{r}. \quad (26)$$

Gdy klocek się porusza, siła tarcia jest przeciwnie skierowana do kierunku prędkości, czyli

$$T = -\operatorname{sgn}(v) fR, \quad (27)$$

gdzie $\operatorname{sgn}(v) = 1$ gdy $v > 0$, oraz $\operatorname{sgn}(v) = -1$ gdy $v < 0$. (Gdy $v = 0$ to formalnie $\operatorname{sgn}(v) = 0$, ale ten przypadek rozpatrzymy osobno.)

Gdy klocek się nie porusza, maksymalna siła tarcia działająca na klocek ma wartość fR i jest skierowana przeciwnie do stycznej do rynny składowej siły ciężkości. Oznacza to, że jeśli klocek w danym momencie jest nieruchomy, to

$$\begin{array}{ll} \text{jeśli } |mg \sin \alpha| \leq fR & \text{to } F_s = 0 & \text{i klocek pozostaje nieruchomy,} \\ \text{jeśli } |mg \sin \alpha| > fR & \text{to } F_s = \operatorname{sgn}(\alpha) (fR - mg |\sin \alpha|) & \text{i klocek zaczyna się poruszać} \\ & & \text{zgodnie z kierunkiem } F_s. \end{array} \quad (28)$$

Powyżej założyliśmy, że $\alpha \neq 0$, gdyż gdy $\alpha = 0$, to nieruchomy klocek nie zacznie się poruszać.

Należy jeszcze uwzględnić związek szybkości zmiany kąta z prędkością

$$v = r \frac{d\alpha}{dt}$$

Równania pozwalające wyznaczyć ruch klocka są zatem następujące

gdy $v \neq 0$:

$$\begin{aligned} a &= -g \sin \alpha - \operatorname{sgn}(v) f \left(g \cos \alpha + \frac{v^2}{r} \right) \\ \Delta v &= a \Delta t, \\ \Delta \alpha &= \frac{v}{r} \Delta t. \end{aligned}$$

gdy $v = 0$

$$\begin{aligned}\Delta v &= 0 \quad \text{gdy } |\sin \alpha| \leq f \cos \alpha, \\ \Delta v &= \operatorname{sgn}(\alpha) (f \cos \alpha - |\sin \alpha|) g \Delta t \quad \text{gdy } |\sin \alpha| > f \cos \alpha,\end{aligned}$$

gdzie zakładamy, że zmiany kąta $\Delta\alpha$, prędkości Δv oraz czasu Δt są bardzo małe.

2. Metoda numeryczna

Oznaczając przez α_i , v_i oraz a_i wartości x , v oraz a w kolejnych chwilach czasu t_i możemy zapisać najprostsze równania iteracyjne zgodne z powyższymi równaniami (przypadek typu $v = 0$ omówimy osobno)

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \frac{v_i}{r} \Delta t, \quad (29)$$

$$a_i = a(\alpha_i, v_i), \quad (30)$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t, \quad (31)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t, \quad (32)$$

gdzie Δt jest krokiem czasowym. Taka metoda (metoda Eulera) jest jednak mało dokładna; znacznie lepszą metodą jest metoda wykorzystująca położenie pośrednie $x_{i+1/2}$ oraz przyspieszenie w położeniu pośrednim $a_{i+1/2}$ (algorytm skokowy lub algorytm żabiego skoku):

$$\alpha_{i+1/2} = \alpha_i + \frac{v_i}{r} \frac{\Delta t}{2}, \quad (33)$$

$$a_{i+1/2} = a(\alpha_{i+1/2}, v_i), \quad (34)$$

$$v_{i+1} = v_i + a_{i+1/2} \Delta t, \quad (35)$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_{i+1/2} + v_{i+1} \frac{\Delta t}{2}, \quad (36)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t. \quad (37)$$

To, że jest to metoda znacznie lepsza, najlepiej pokazuje fakt, że w przypadku stałej siły (a więc i stałego przyspieszenia) daje ona dokładne wyniki.

Komplikacją w naszym przypadku jest to, że przy zmianie znaku prędkości siła tarcia zmienia się w sposób nieciągły i to, że przypadek $v = 0$ powinniśmy rozpatrywać osobno. Formalnie szansa na to, że w jakimś kroku iteracyjnym wystąpi $v_i = 0$, jest bardzo mała, co jednak nie znaczy, że problemu nie ma.

Jeśli prędkość zmienia znak przy przejściu od kroku i do kroku $i+1$, to „fizycznie” na to patrząc, w jakiejś chwili $t_x \in [t_i, t_{i+1}]$ klocek jest nieruchomy, a siła tarcia w przedziale czasów $(t_x, t_{i+1}]$ ma przeciwny znak niż poprzednio, czego nie uwzględniamy. Błąd z tym związany może być znacznie większy niż błąd w trakcie „zwykłego” kroku, w którym siła tarcia nie zmienia znaku. Jednak błąd ten oczywiście maleje ze zmniejszaniem Δt , a prócz tego takich punktów zwrotnych jest znacznie mniej niż „zwykłych” kroków i ich liczba nie rośnie ze zmniejszaniem Δt , zatem oczekujemy, że błędy te się nie kumulują. To oznacza, że możemy przyjąć, że nasz algorytm bez dodatkowych modyfikacji będzie dawał poprawne rezultaty dla odpowiednio małych Δt – za wyjątkiem przypadku, gdy $|g \sin \alpha| < f (g \cos \alpha)$. W tym przypadku zmiana znaku prędkości

może spowodować zmianę znaku siły F_s , co może spowodować kolejną zmianę znaku prędkości i.t.d. W efekcie otrzymujemy sztuczne oscylacje wokół położenia odpowiadającego zatrzymaniu klocka i błędy pojawiające się przy zmianie prędkości mogą się kumulować.

To oznacza, że nasz algorytm, odpowiadający równaniom (33)-(37), wymaga uzupełnienia o specjalne rozważenie przypadku, gdy prędkość zmienia znak. To dodatkowe rozważenie może mieć postać następującego kroku, wykonywanego po kroku (35):

$$\text{jeśli } v_{i+1} \cdot v_i \leq 0 \text{ oraz } g \left| \sin \alpha_{i+1/2} \right| \leq f \left(g \cos \alpha_{i+1/2} \right), \text{ to } v_{i+1} = 0. \quad (38)$$

Innymi, słowy, jeśli prędkość zmienia znak i maksymalna wartość siły tarcia jest większa od wartości składowej stycznej siły grawitacji, to zatrzymujemy klocek.

Do równań iteracyjnych musimy dodać również warunki początkowe; w rozważanym zagadnieniu są to warunki

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad v_1 = 0. \quad (39)$$

3. Implementacja metody numerycznej

Opisaną powyżej metodę numeryczną zaimplementowano wykorzystując arkusz kalkulacyjny, w którym ustalone i odpowiada jednemu wierszowi, a obliczenia z równań (33 – 37) oraz (38) znajdują się w komórkach tego wiersza.

Równania iteracyjne łatwo jest przekształcić na program komputerowy, który w pętli oblicza kolejne wartości położenia i prędkości. Odpowiada to następującemu pseudokodowi

```
v      = 0
alfa  = -pi/2
t      = 0
powtarzaj aż t > t_konc {
  vp   = v // zapamiętujemy v w pomocniczej zmiennej vp
  alfa = alfa + (v/r) * dt/2
  a    = -g*sin(alfa) - \operatorname*{sgn}(v)*f*( g*cos(alfa) + v*v/r )
  v    = v + a* dt
  jeżeli (vp*v <= 0 oraz abs(sin(alfa))<= f * cos(alfa) ) to v = 0
  alfa = alfa + (v/r) * dt/2
  t    = t + dt
}
```

Powyżej t_konc jest czasem, do którego wykonujemy powtórzenia (w naszym przypadku 10 (s)), dt – odstępem czasu, natomiast f , r to parametry z treści zadania. Przyspieszenie ziemskie g przyjęto równe 9,81 (m/s²).

Dodatkowo należy dodać instrukcje zapisujące t oraz α np. po każdym powtórzeniu pętli, oraz zapisywanie czasu oraz położenia odpowiadającego pierwszemu spełnieniu warunku "jeżeli" (czyli zatrzymaniu spowodowanemu przez tarcie).

Kod w języku C++ znajduje się w pliku dostępnym na stronie KGOF; w rzeczywistości kod ten nieco odbiega od przedstawionego w powyższym pseudokodzie – np. powtarzane instrukcje

zgrupowano w funkcję krok, a zapis czasu i położenia odbywa się co czas dt , który może być większy od czasu dt . Do zrobienia wykresu zapisanych wartości wykorzystano arkusz kalkulacyjny.

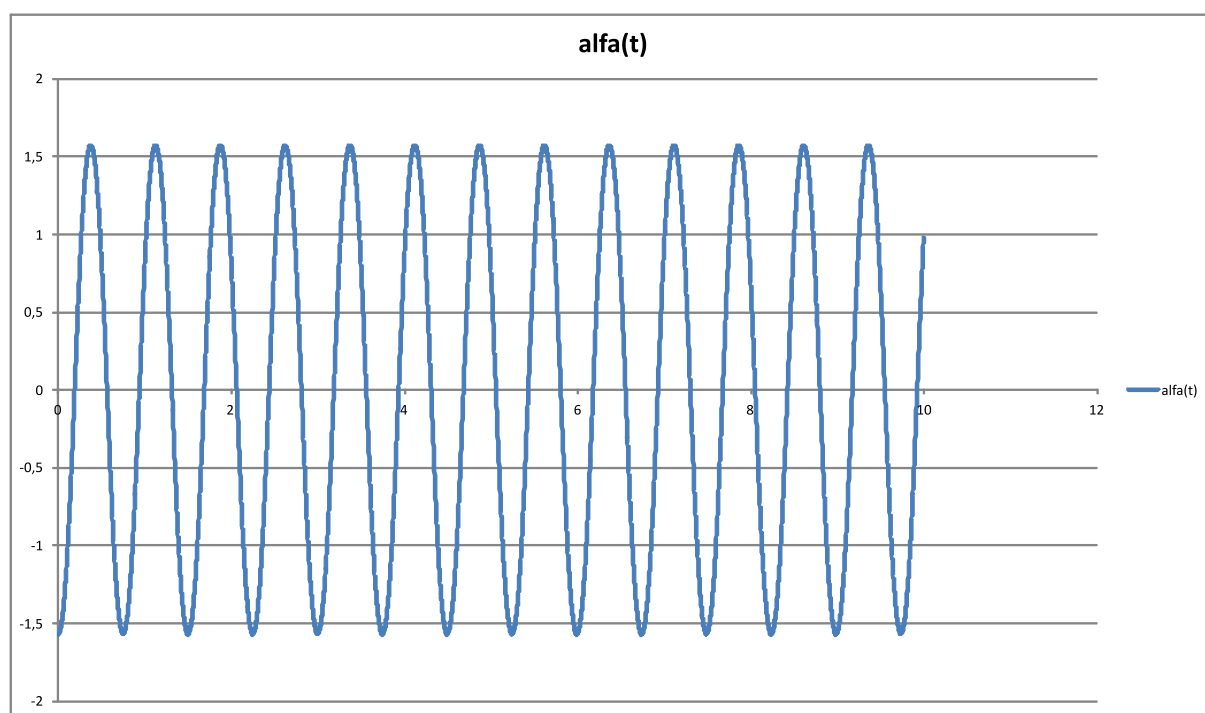
Dla każdej z wartości współczynnika f tarcia wyznaczono ruch dla $dt = 0,001$ (s) oraz $dt = 0,0001$ (s). Ponieważ wykresy w obu przypadkach dt (przy tej samej wartości f) wizualnie się nie różniły, otrzymana chwila zatrzymania (gdy występowało zatrzymanie) oraz odpowiadające jej α były takie same z dokładnością do odpowiednio 0,01 (s) oraz 0,01 (rad), uznano, że metoda jest poprawna i wystarczająco dokładna.

Osobnym zagadnieniem było wyznaczenie wartości współczynnika tarcia f , przy której klocek bez przekraczania środka rynny, zatrzymuje się na tym środku.

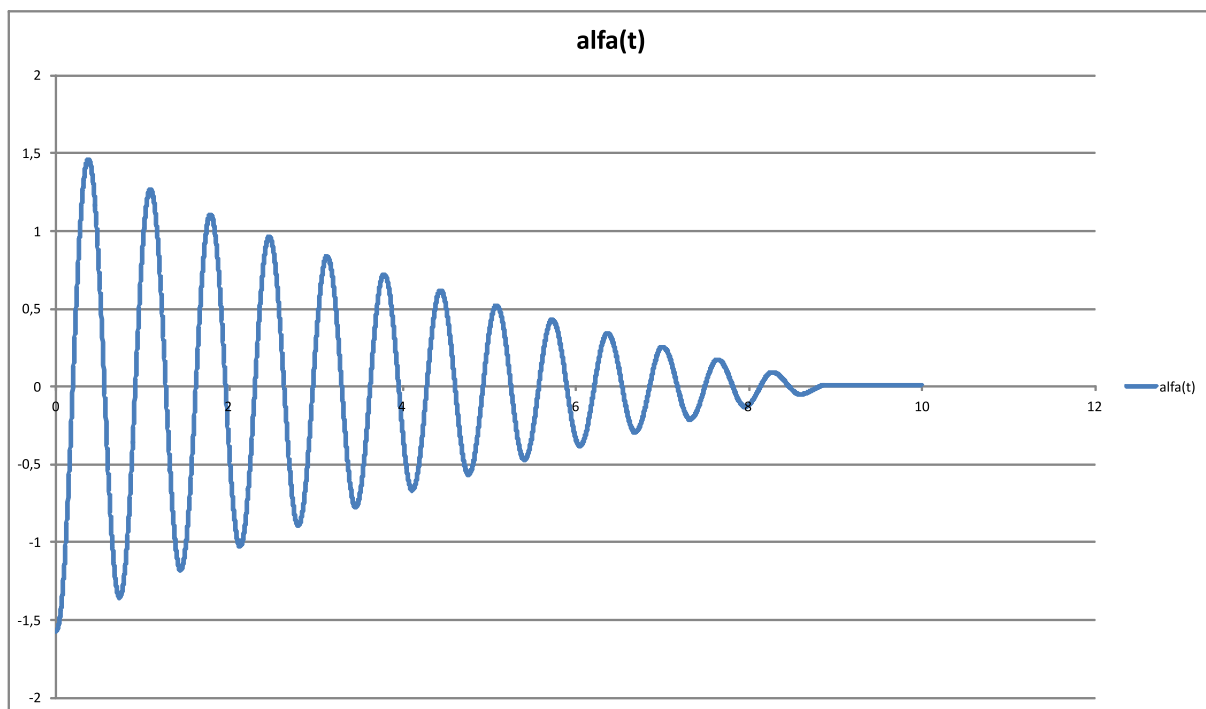
Po rozważeniu przypadków wartości współczynnika tarcia a) 0; b) 0,02; c) 0,1; d) 0,5, uznano że ta poszukiwana wartość jest zbliżona do 0,5. Zamiast stosować bardziej wyrafinowane metody sprawdzono wykres i miejsce zatrzymania dla wartości f równej 0,7; 0,6; 0,61. Ponieważ przypadkach 0,6 oraz 0,61 klocek zatrzymywał się w pobliżu środka rynny, po przeciwnych jego stronach, przyjęto, że wartość f odpowiadająca zatrzymaniu klocka na środku to $0,605 \pm 0,005$.

4. Wyniki i wykresy

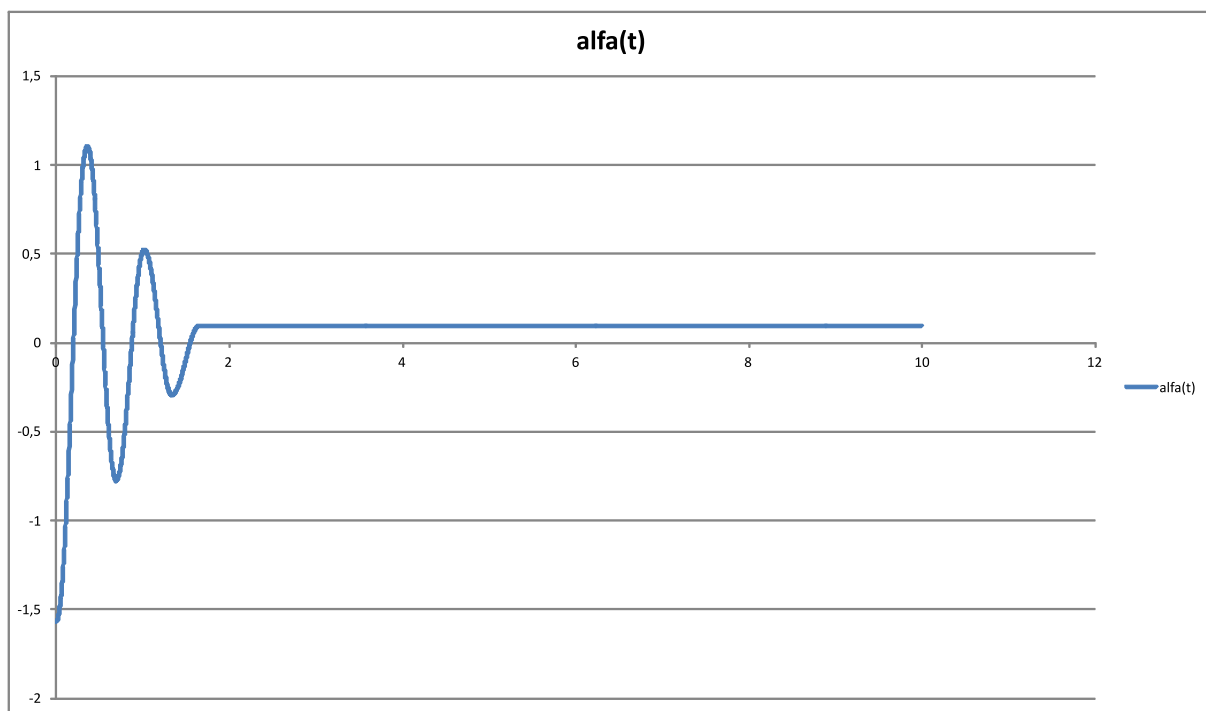
a) $f = 0$; brak zatrzymania



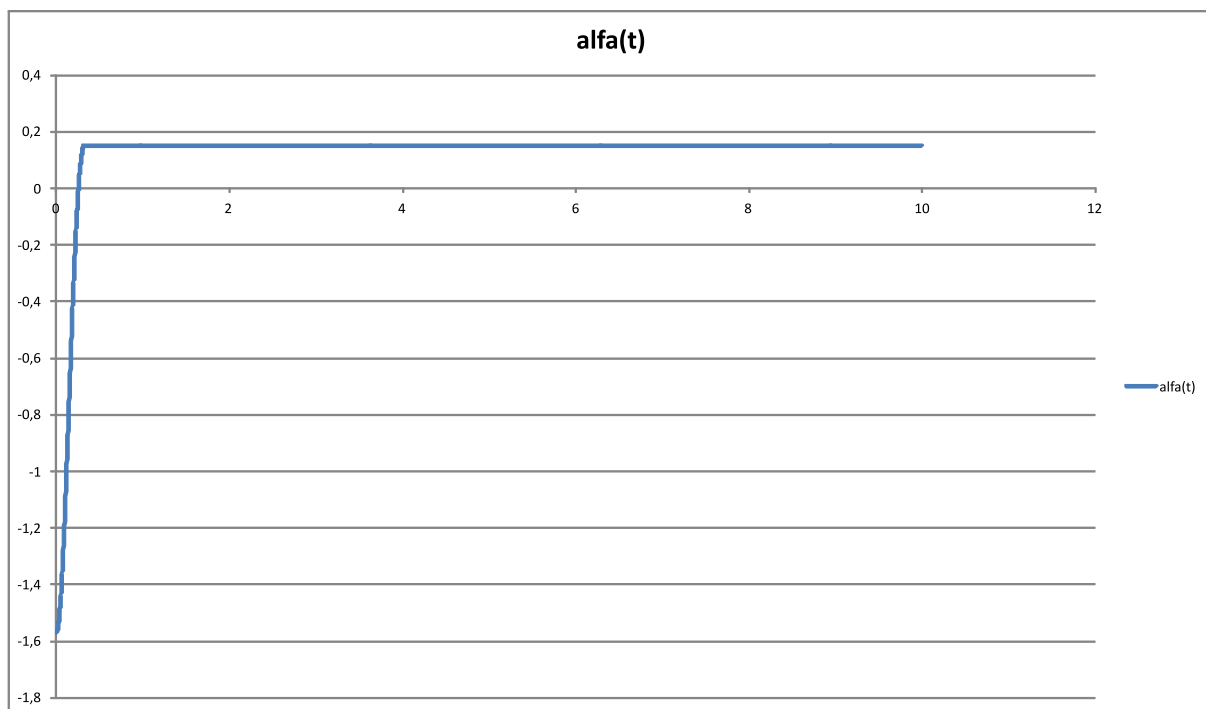
b) $f = 0,02$; zatrzymanie dla $t = 8,9$ (s), $\alpha = 0,01$



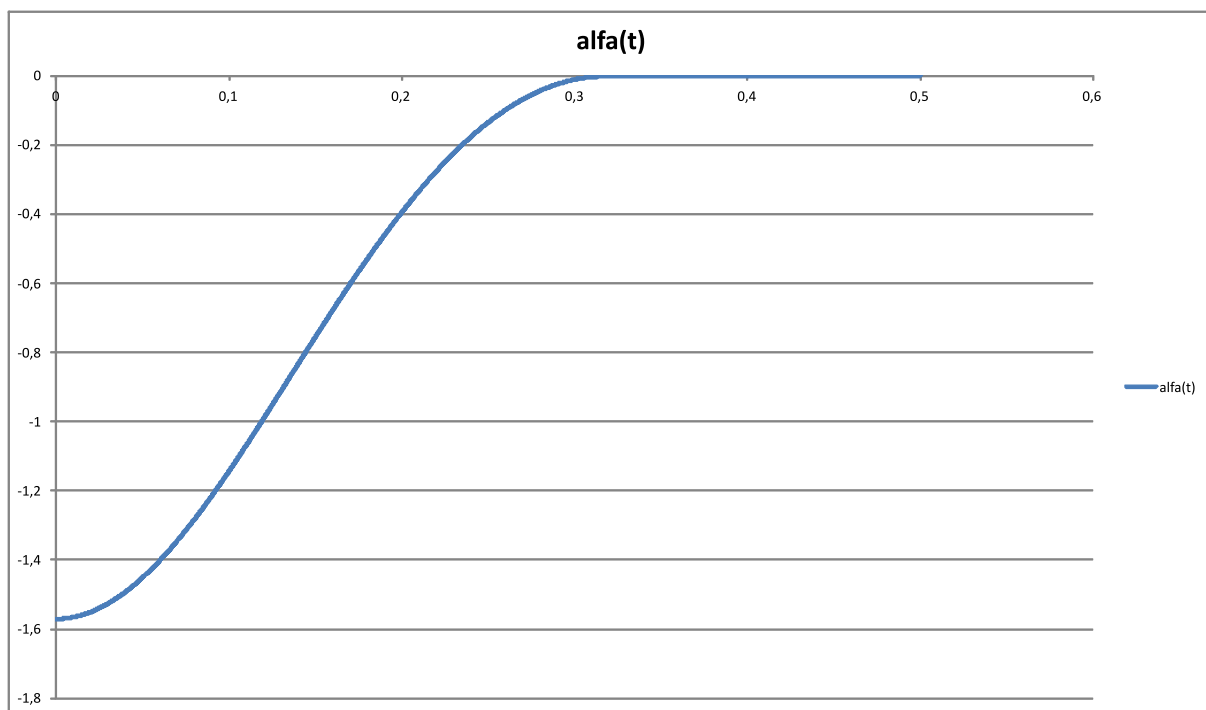
c) $f = 0,1$; zatrzymanie dla $t = 1,65$ (s), $\alpha = 0,09$



d) $f = 0,5$; zatrzymanie dla $t = 0,33$ (s), $\alpha = 0,15$



Zatrzymanie w środku (bez przekraczania tego środka) następuje dla $f = 0,605$ (zatrzymanie dla $t = 8,9$ (s), $\alpha = -0,02$; sprawdzono, że przy $f = 0,61$ zatrzymanie następuje dla $\alpha < 0$, a przy $f = 0,60$ – dla $\alpha > 0$). Wykres (w zakresie do 0,5 s) w tym przypadku jest następujący



Punktacja zadania T4.

Siła powodująca ruch klocka (wzór (25) lub równoważny) 1 pkt.
 Siła reakcji rynny (wzór (26) lub równoważny) 1 pkt.

- Siła tarcia (wzór (27) lub równoważny) wraz z opisem, co się może dziać, gdy klocek się zatrzyma 1 pkt.
- Algorytm pozwalający wyznaczyć ruch klocka (np równania (33)-(37)) 2 pkt.
- Uwzględnienie przypadku zatrzymania się klocka (np. instrukcja (38)) 1 pkt.
- Opis implementacji algorytmu (wystarczy ogólna informacja) oraz sposobu sprawdzenia poprawności rezultatów (np. powtórzenie wyznaczania toru ze zmniejszonym krokiem czasowym i sprawdzenie wizualnej identyczności wykresów oraz położenia zatrzymania klocka w granicach przyjętej dokładności) 1 pkt.
- Wykresy dla przypadków a), b), c) d) wraz z podaniem chwili zatrzymania w przypadkach b), c) d) zgodne z oficjalnym rozwiązaniem (oczekiwana dokładność $t: \pm 0,3$, chyba, że podano jawnie wielkość niepewności (nie większą jednak niż ± 1 (s)) wtedy uwzględniamy tę niepewność przy porównaniu), 2 pkt
(0,5 za każdy przypadek, zaokrąglone w górę).
- Szukane f odpowiadające zatrzymaniu ($f = 0,605 \pm 0,06$) 1 pkt.

Rozwiązanie zadania D1

Część teoretyczna

Moduł Kirchoffa drutu można wyznaczyć przy pomocy układu doświadczalnego przedstawionego na rysunku 1. Druć przymocowano jednym końcem do statywu, a do drugiego, swobodnie wiszącego końca przyklejono kawałkiem taśmy klejącej kilka patyczków makaronu, każdy o długości l . Patyczki makaronu są zamocowane za ich środek w taki sposób, że wisząc swobodnie skierowane są poziomo (zob. Rys. 1), a długość napiętej części drutu pomiędzy patyczkami a statywem wynosi L .

Zgodnie ze wskazówką daną w treści zadania, geometryczny moment bezwładności drutu wynosi

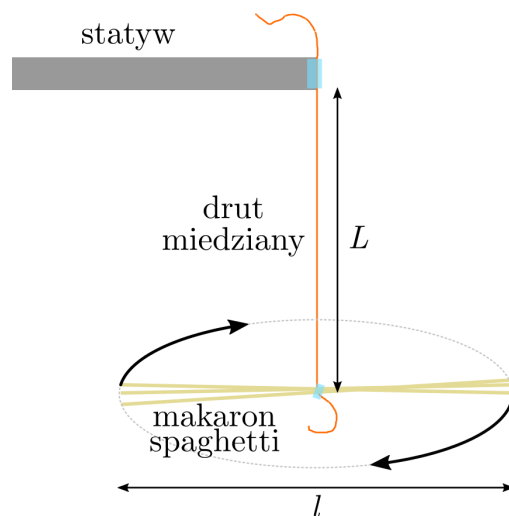
$$J = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{1}{32}\pi d^4, \quad (40)$$

gdzie d jest średnicą drutu. Moment siły niezbędny do skręcenia względem siebie nici o kąt α wokół jej osi wynosi wtedy

$$T = \alpha \frac{JG}{L} = \alpha \frac{\frac{1}{32}\pi d^4 G}{L} = \alpha \frac{\pi d^4 G}{32 L}. \quad (41)$$

Obrócenie patyczków makaronu wokół osi drutu spowoduje powstanie niezrównoważonego momentu siły powodującego powrót patyczków w kierunku położenia równowagi. Aby wyznaczyć przyspieszenie kątowe takiego układu, a później okres jego drgań, należy najpierw wyznaczyć moment bezwładności patyczków wokół osi obrotu. Moment bezwładności układu n patyczków, każdy o masie m_0 wynosi,

$$I = \frac{1}{12}nm_0l^2. \quad (42)$$



Rysunek 1: Schemat układu pomiarowego.

zatem przyspieszenie kątowe układu można opisać równaniem

$$\varepsilon = -\frac{T}{I} = -\frac{\alpha \frac{\pi}{32} \frac{d^4 G}{L}}{\frac{1}{12} n m_0 l^2} = -\alpha \frac{3\pi d^4 G}{8 n m_0 l^2 L}. \quad (43)$$

Przez analogię do równania ruchu oscylatora harmonicznego w ruchu liniowym:

$$a + \omega^2 x = 0 \quad (44)$$

możemy je skonstruować dla ruchu obrotowego:

$$\varepsilon + \omega^2 \alpha = 0. \quad (45)$$

Równanie (43) można zatem przekształcić do postaci równania oscylatora harmonicznego:

$$\varepsilon + \frac{3\pi d^4 G}{8 n m_0 l^2 L} \alpha = 0, \quad (46)$$

gdzie częstość kołowa drgań wynosi:

$$\omega = \sqrt{\frac{3\pi d^4 G}{8 n m_0 l^2 L}}. \quad (47)$$

Czas pomiędzy kolejnymi maksymalnymi wychyleniami patyczków wyniesie połowę okresu drgań

$$t_{1/2} = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{8\pi^2 n m_0 l^2 L}{3\pi d^4 G}}. \quad (48)$$

Otrzymane równanie ma postać równania prostej

$$t_{1/2} = A \cdot \sqrt{n}, \quad (49)$$

gdzie współczynnik kierunkowy A wynosi

$$A = \sqrt{\frac{8\pi^2 m_0 l^2 L}{3\pi d^4 G}}. \quad (50)$$

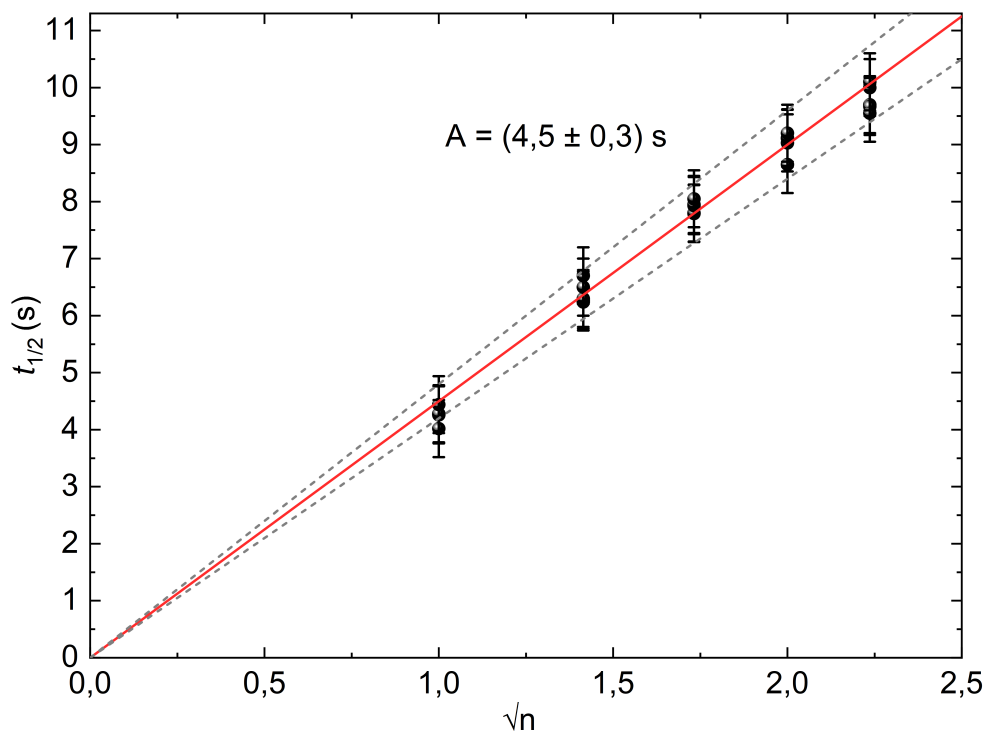
Po dopasowaniu prostej i wyznaczeniu współczynnika A można wyznaczyć wartość modułu Kirchhoffa:

$$G = \frac{8\pi m_0 l^2 L}{3d^4 A^2}. \quad (51)$$

Równanie (49) można również zapisać w postaci $t_{1/2}^2 = A' \cdot n$. Równanie to również będzie równaniem prostej. Powodem wyboru formy równania (49) było łatwiejsze nanoszenie na wykres niepewności pomiaru na osi pionowej (rysunek 2).

Część doświadczalna

Zestawiono układ doświadczalny przedstawiony na rysunku 1. Zmierzono linijką długości patyczków l oraz napiętej części drutu L uzyskując $l = (251 \pm 1)$ mm oraz $L = (235 \pm 2)$ mm. Na wadze o dokładności 1 g położono 100 patyczków makaronu i zmierzono ich masę równą 81 g. Na tej podstawie wyznaczono masę pojedynczego patyczka: $m_0 = (0,81 \pm 0,01)$ g. Przyjęto, że średnica drutu $d = 0,1$ mm znana jest dokładnie.



Rysunek 2: Wyniki pomiarów.

Pomiar czasu $t_{1/2}$ połowy pełnego drgania układu przeprowadzono poprzez wychylenie patyczka o około pół obrotu z położenia równowagi, a następnie mierzeniu kilku kolejnych odcinków czasu pomiędzy chwilami maksymalnego wychylenia. Pomiar powtórzono dla kilku różnych liczb zawieszonych patyczków n z zakresu pomiędzy 1 a 5. Zebrane wyniki przedstawiono na rysunku 2. Niepewność pomiaru czasu $t_{1/2}$ oszacowano na 0,5 s.

Do zebranych danych pomiarowych dopasowano prostą najlepszego dopasowania oraz proste o skrajnych nachyleniach odpowiadające punktom pomiarowym i wyznaczono współczynnik kierunkowy A :

$$A = (4,3 \pm 0,6) \text{ s}, \quad (52)$$

Korzystając z równania (51) można obliczono moduł Kirchhoffa:

$$G = \frac{8\pi m_0 l^2 L}{3d^4 A^2} = (50 \pm 8) \text{ GPa}, \quad (53)$$

Niepewność wyniku końcowego obliczono jako połowę różnicy między wartością modułu Kirchhoffa obliczonego dla prostej o największym nachyleniu, dla wielkości L , l , oraz m_0 pomniejszonych o ich niepewności oraz dla prostej o najmniejszym nachyleniu, dla wielkości L , l oraz m_0 powiększonych o ich niepewności. Głównym czynnikiem wpływającym na niepewność wyniku końcowego była niepewność współczynnika kierunkowego narysowanej prostej, wynikająca z niedokładności pomiaru czasu $t_{1/2}$. W rozwiązaniu zaniebano wpływ tłumienia na częstość drgań.

Komentarz: Otrzymana wartość modułu Kirchhoffa miedzi jest zgodna z wartością tablicową wynoszącą 45 GPa.

Punktacja zadania D1.

Pomysł na metodę pomiaru wykorzystującą drgania skrotne (wzór (47) lub równoważny)	5 pkt.
Pomysł na wyznaczenie modułu Kirchhoffa (wzór (51) lub równoważny)	2 pkt.
Opis układu doświadczalnego i procedury pomiarowej	3 pkt.
Wykonanie pomiarów okresu drgań dla co najmniej czterech różnych liczb patyczków	4 pkt.
Wyznaczenie modułu Kirchhoffa materiału, z którego wykonany jest drut	4 pkt.
Ocena niepewności otrzymanych wyników	2 pkt.

Rozwiązanie zadania D2

Część teoretyczna

Rozwiązanie wykorzystuje pomiar składowej pionowej przyspieszenia telefonu przymocowanego taśmą klejącą do tułowia. Skok wykonywano w taki sposób, aby telefon pozostawał ustawiony w przybliżeniu pionowo przez cały czas trwania skoku. W takim przypadku, składowa przyspieszenia wzdłuż telefonu jest równa składowej pionowej przyspieszenia człowieka. Oznaczmy przez $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ składową pionową przyspieszenia telefonu oraz, tym samym, człowieka względem powierzchni ziemi w kolejnych chwilach czasu $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, gdzie liczba w indeksie dolnym jest numerem próbki danych zebranej przez akcelerometr. Aby obliczyć składową pionową prędkości w chwili t_{i+1} założmy, że przez czas $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ruch odbywał się ze średnim przyspieszeniem $a_{\text{sr}} = (a_{i+1} + a_i)/2$, czyli z przyspieszeniem równym średniej arytmetycznej przyspieszenia początkowego i końcowego. Przy takim założeniu, znając prędkość w chwili początkowej v_i możemy obliczyć prędkość w chwili końcowej v_{i+1} :

$$v_{i+1} = v_i + a_{\text{sr}} \cdot \Delta t, \quad (54)$$

a zatem

$$v_{i+1} = v_i + (a_i + a_{i+1})/2 \cdot (t_{i+1} - t_i). \quad (55)$$

Moc mechaniczną mięśni nóg w chwili t_i podczas skoku wyrażamy jako iloczyn chwilowej prędkości ciała v_i oraz siły F_i działającej na ciało:

$$P_i = v_i F_i. \quad (56)$$

Siła F_i niezbędna do zrównoważenia siły grawitacji oraz do nadania masie m przyspieszenia a_i wynosi

$$F_i = mg + ma_i. \quad (57)$$

Moc chwilowa mięśni wynosi zatem:

$$P_i = v_i m (g + a_i) \quad (58)$$

Masa m , na którą działa siła mięśni nóg nie jest równa całkowitej masie człowieka. Stopy oraz część nóg mają mniejsze przyspieszenie i prędkość niż reszta ciała oraz mniej oddziałują na mięśnie nóg swoim ciężarem.

Aby oszacować W tym rozwiązaniu przyjmujemy przybliżony opis, w którym część nóg poniżej kolana nie porusza się, natomiast pozostała część nóg porusza się z takim przyspieszeniem jak reszta ciała człowieka. Masę nóg poniżej kolan przybliżamy przez walec o długości l równej

odległości pomiędzy spodem stopy a kolanem, a obwód walca s przybliżamy przez obwód łydki w połowie jej wysokości. W takim modelu objętość nieruchomej części nogi wynosi:

$$V = l\pi \left(\frac{s}{2\pi} \right)^2, \quad (59)$$

zatem masa nieruchomych części obu nóg wyniesie:

$$m_0 = 2\rho V = \frac{ls^2\rho}{2\pi}, \quad (60)$$

gdzie ρ jest średnią gęstością ciała ludzkiego. Masa m na którą oddziałują mięśnie nóg jest równa całkowitej masie człowieka m_c pomniejszonej o masę jego w przybliżeniu nieruchomej części:

$$m = m_c - m_0 = m_c - \frac{ls^2\rho}{2\pi}, \quad (61)$$

Obliczając prędkości v_i , masę m , a następnie zgodnie ze wzorem (58) moc chwilową P_i można odczytać wartość maksymalną mocy mechanicznej mięśni podczas skoku pionowego.

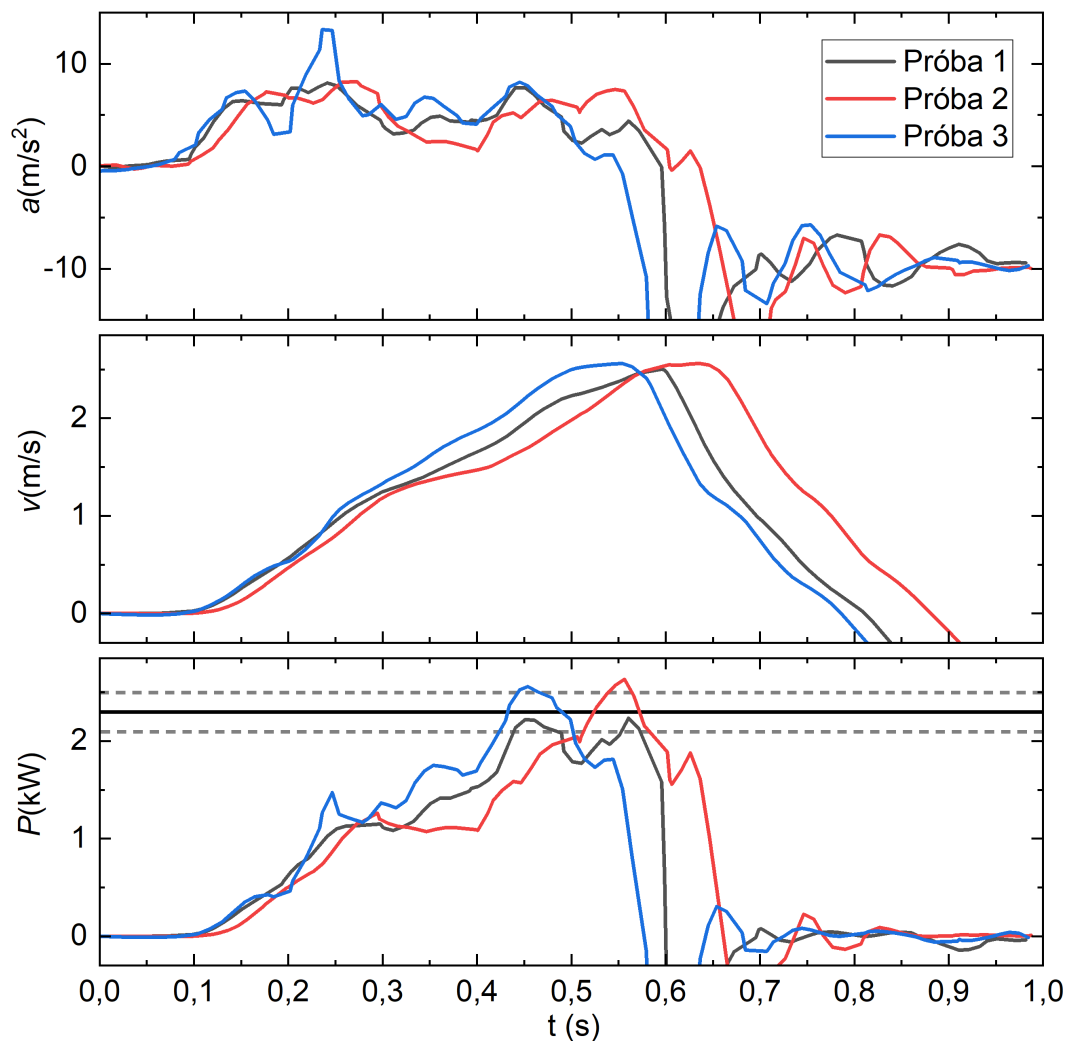
Część doświadczalna

Zmierzono długość $l = 0,49$ m oraz obwód $s = 0,36$ m. Przyjmując średnią gęstość ciała równą gęstości wody $\rho = 1000$ kg/m³ obliczono na podstawie wzoru (60) masę nieruchomej części nóg $m_0 = (10 \pm 5)$ kg. Głównym źródłem niepewności jest niedoskonałość modelu opisu masy nieruchomych części ciała. Niepewność tę oszacowano na 50%. Następnie zmierzono masę ciała wagą łazienkową otrzymując wartość $m_c = 74$ kg. Masa, na którą oddziałują mięśnie nóg wynosi zatem $m = (64 \pm 5)$ kg. Niepewność względna wyznaczenia masy m wynosi 8%.

Telefon przymocowano taśmą klejącą do brzucha w orientacji pionowej. Wybrano ten sposób przymocowania, aby przyspieszenie telefonu jak najlepiej odpowiadało przyspieszeniu ciała. Włączono pomiar przyspieszenia telefonu względem powierzchni ziemi. Kucnięto, a następnie odczekano chwilę nieruchomo. Skok wykonano w taki sposób, aby tułów (a zarazem telefon) pozostały w pozycji pionowej. Do analizy wybrano zestaw danych rozpoczynający się chwilę przed skokiem (widocznym jako pojawienie się przyspieszenia pionowego). Założono, że prędkość początkowa przed skokiem (v_1) jest równa zero. Korzystając ze wzoru (55), przy użyciu arkusza kalkulacyjnego obliczono wartości prędkości v_i w kolejnych chwilach czasu t_i . Następnie, korzystając ze wzoru (58) obliczono wartości mocy P_i . Pomiar przeprowadzono trzykrotnie. Wyniki składowej pionowej przyspieszenia, składowej pionowej prędkości oraz wartości mocy chwilowej mięśni przedstawiono na rysunku 3. Z wykresu odczytano graficznie maksymalną chwilową moc mięśni. Podczas skoku występowały wahania przyspieszenia, a zatem też wahania obliczonej mocy chwilowej. Szybkozmiennne oscylacje uznano za artefakt pomiarowy, zatem odczytana wartość mocy chwilowej jest mniejsza niż moc chwilowa obliczona w niektórych odcinkach czasu. Odczytana wartość mocy chwilowej wynosi

$$P_{\max}' = (2,3 \pm 0,2) \text{ kW}. \quad (62)$$

Powyższa, odczytana z wykresu wartość nie uwzględnia jednak niepewności wyznaczenia masy m . Niepewność względna wyznaczenia masy m wynosi 8%. Ponieważ obliczona wartość mocy chwilowej jest wprost proporcjonalna do przyjętej wartości masy m , występuje dodatkowy



Rysunek 3: Składowa pionowa przyspieszenia, prędkości oraz wartość obliczonej mocy mięśni uzyskane podczas trzech skoków. Ciągną poziomą linią zaznaczono odczytaną wartość maksymalnej chwilowej mocy mięśni podczas skoku. Liniami przerywanymi zaznaczono niepewność odczytu.

wkład do niepewności wyznaczenia mocy chwilowej wynoszący 8% jej wartości, czyli 0,2 kW. Maksymalna moc chwilowa siły mięśni nóg podczas skoku wynosi zatem

$$P_{\max} = (2,3 \pm 0,4) \text{ kW}. \quad (63)$$

Punktacja zadania D2.

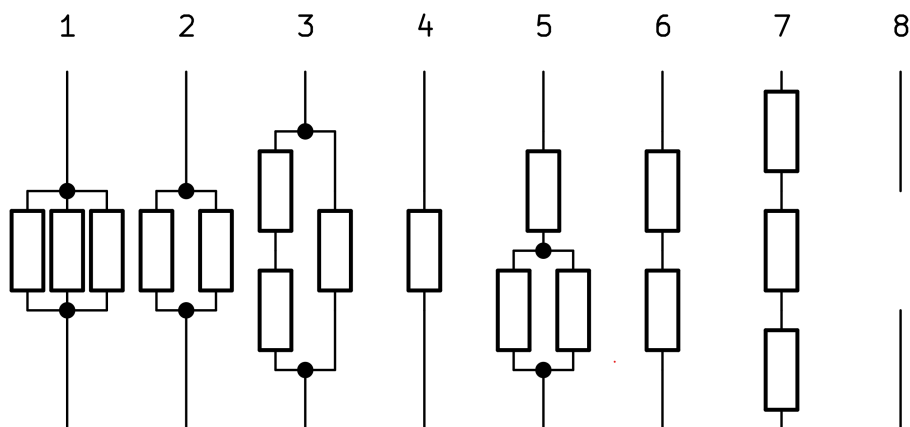
Pomysł na wyznaczenie składowej pionowej prędkości (wzór (55) lub równoważny) .. 3 pkt.

Oszacowanie części masy człowieka, na którą nie oddziałują mięśnie podczas skoku (wzór (60) lub równoważny), lub uwzględnienie wpływu jej zaniedbania w oszacowaniu niepewności wyniku 2 pkt.
 Pomysł na wyznaczenie mocy mechanicznej siły mięśni (wzór (58) lub równoważny) .4 pkt.
 Opis układu pomiarowego oraz procedury pomiaru 2 pkt.
 Zebranie pomiarów składowej pionowej przyspieszenia podczas skoku 2 pkt.
 Powtórzenie pomiarów co najmniej trzykrotnie 1 pkt.
 Obliczenie wartości chwilowych mocy mechanicznych mięśni podczas skoku 2 pkt.
 Wyznaczenie maksymalnej mocy mechanicznej siły mięśni podczas skoku 2 pkt.
 Ocena niepewności otrzymanego wyniku 2 pkt.

Rozwiązanie zadania D3

Część teoretyczna

Pomysł rozwiązania zadania polega na tworzeniu z dostępnych oporników o oporach $R_0 = 10 \Omega$ obwodów o różnych oporach zastępczych R_z a następnie na pomiarze napięcia baterii po podłączeniu do niej utworzonych obwodów. Na rysunku 4 przedstawiono schematy obwodów o wszystkich możliwych niezerowych wartościach oporu R_z . Numerem 8 oznaczono obwód otwarty (o nieskończonym oporze).



Rysunek 4: Obwody złożone z co najwyżej trzech identycznych oporników, o wszystkich możliwych niezerowych oporach zastępczych.

Wartości oporów zastępczych układów oznaczonych numerami 1-7 można obliczyć korzystając z wzorów na opór zastępczy oporników połączonych szeregowo:

$$R = R_A + R_B + R_C + \dots ; \quad (64)$$

oraz równoległe:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} + \dots} . \quad (65)$$

Wartości oporów zastępczych układów oznaczonych numerami 1-7 wynoszą zatem:

$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0}} = \frac{1}{3} R_0 = 3\frac{1}{3} \Omega ; \quad (66)$$

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0}} = \frac{1}{2}R_0 = 5 \Omega ; \quad (67)$$

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0+R_0}} = \frac{2}{3}R_0 = 6\frac{2}{3} \Omega ; \quad (68)$$

$$R_4 = R_0 = 10 \Omega ; \quad (69)$$

$$R_5 = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0}} = \frac{3}{2}R_0 = 15 \Omega ; \quad (70)$$

$$R_6 = R_0 + R_0 = 2R_0 = 20 \Omega ; \quad (71)$$

$$R_7 = R_0 + R_0 + R_0 = 3R_0 = 30 \Omega ; \quad (72)$$

Zgodnie ze wzorem podanym w treści zadania, gdy przez baterię o oporze wewnętrznym R_w i sile elektromotorycznej \mathcal{E} płynie prąd o natężeniu I , wtedy napięcie na niej wynosi:

$$U = \mathcal{E} - I \cdot R_w. \quad (73)$$

Natężenie prądu I płynącego przez baterię jest równe natężeniu prądu płynącego przez obwód zbudowany z oporników i można obliczyć je korzystając z prawa Ohma:

$$I = U/R. \quad (74)$$

Równanie (73) ma postać równania prostej, w którym współczynnik kierunkowy A ma postać:

$$A = -R_w, \quad (75)$$

natomiast wyraz wolny jest równy \mathcal{E} .

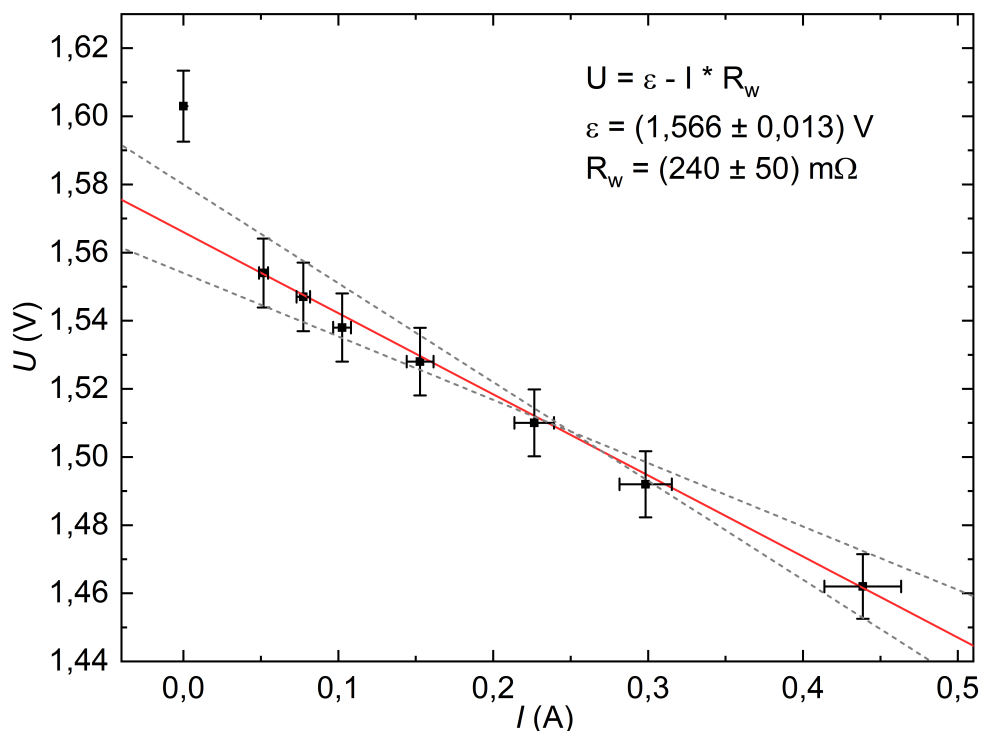
Parametry te można wyznaczyć doświadczalnie poprzez dopasowanie prostej do wykresu napięcia U w zależności od natężenia prądu I .

Część doświadczalna

Zestawiono układy doświadczalne złożone z baterii oraz podłączonych do niej różnych obwodów przedstawionych na rysunku 4. Układ zestawiano na jak najkrótszy czas umożliwiając pomiar napięcia U woltomierzem, a następnie szybko go rozłączało aby uniknąć nadmiernego rozładowania lub nagrzania baterii. Natężenie prądu I płynącego przez obwód obliczano na podstawie wzorów (66-72), a w przypadku obwodu numer 8 przyjęto $I = 0$. Zebrane wyniki przedstawiono na rysunku 5.

Niepewność pomiaru użytego woltomierza wynosiła $0,5\% + 2$ cyfry, co przy pomiarach wartości około $1,5$ V przekłada się na niepewność względną pomiaru około $0,65\%$. Użyte oporniki charakteryzowały się klasą dokładności 5% . Ponieważ natężenie prądu I jest obliczane na podstawie wartości zarówno oporu układu oporników jak i wartości napięcia U , za niepewność względną wyznaczenia wartości natężenia prądu I przyjęto sumę składowych niepewności względnych, czyli $5,65\%$.

Dane doświadczalne wykazują liniową zależność dla zmierzonych prądów I o natężeniach w zakresie od 50 mA do 440 mA. W związku z tym dopasowanie prostej opisanej równaniem (73)



Rysunek 5: Wyniki pomiarów.

przeprowadzono do punktów z tego zakresu. Do otrzymanej zależności dopasowano prostą najlepiej pasującą do punktów pomiarowych oraz wykreślono proste o skrajnych nachyleniach zgodne z punktami pomiarowymi. Otrzymana wartość siły elektromotorycznej baterii wyniosła

$$\mathcal{E} = (1,566 \pm 0,013) \text{ V}, \quad (76)$$

natomiast jej opór wewnętrzny

$$R_w = (240 \pm 50) \text{ m}\Omega. \quad (77)$$

Niepewności wyników końcowych obliczono jako połowę różnicy między wartościami pojemności obliczonymi dla prostej o największym nachyleniu oraz dla prostej o najmniejszym nachyleniu.

Komentarz: Dla zbadanej baterii model stałego oporu wewnętrznego i stałej siły elektromotorycznej ogniwa nie jest w stanie opisać charakterystyki prądowo-napięciowej dla bardzo małych gęstości prądu.

Punktacja zadania D3.

- Pomysł na metodę pomiaru (wzory (73) oraz (74) lub równoważne) 4 pkt.
 Wyznaczenie oporów zastępczych co najmniej pięciu różnych obwodów (rysunek 4) . 4 pkt.
 Zbadanie wszystkich ośmiu obwodów 2 pkt.
 Opis układu pomiarowego oraz procedury pomiaru 2 pkt.
 Pomiar prądu oraz napięcia baterii dla różnych konfiguracji oporników 2 pkt.
 Określenie zakresu prądów, dla którego zależność liniowa jest spełniona, jeśli nie jest ona spełniona dla wszystkich punktów pomiarowych 2 pkt.
 Wyznaczenie oporu wewnętrznego oraz siły elektromotorycznej baterii 2 pkt.

Ocena niepewności otrzymanych wyników 2 pkt.