

# LXXII OLIMPIADA FIZYCZNA

## ZAWODY III STOPNIA

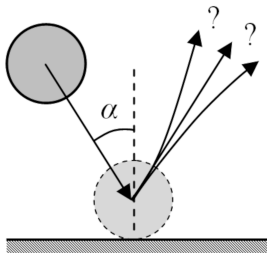
CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 16.04.2023

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

### Zadanie 1

Jednorodna kula o masie  $m$  i promieniu  $r$  toczyła się z prędkością  $v_0$  po poziomej powierzchni bez poślizgu, a oś jej obrotu była pozioma. W pewnym momencie kula uderzyła pod kątem  $\alpha$  w gładką pionową ścianę i odbiła się od niej sprężysto. Ponieważ ściana była gładka, między kulą a ścianą nie wystąpiło tarcie. Po odbiciu przez jakiś czas kula ślizgała się po podłożu i występujące przy tym tarcie kinetyczne należy uwzględnić. Współczynnik tego tarcia jest równy  $f$ . Odbicie od ściany trwało znacznie krócej niż poślizg kuli po odbiciu. Pomiń tarcie toczne i opór powietrza.

a) Czy tor kuli po odbiciu będzie prostoliniowy, czy wygięty w stronę od ściany, czy wygięty do ściany? Załączony rysunek przedstawia sytuację od góry.



b) Wyznacz kierunek i wartość prędkości kuli po ustaniu poślizgu.

Uwagi:

Moment pędu jest wektorem, i dla kuli, względem jej środka masy jest równy

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

gdzie  $I$  jest momentem bezwładności kuli względem środka masy, równym  $\frac{2}{5}mr^2$ , natomiast  $\vec{\omega}$  jest wektorem prędkości kątowej: jego długość jest równa prędkości kątowej obrotu, kierunek jest kierunkiem osi obrotu, a zwrot jest dany regułą śruby prawoskrętnej.

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego ma postać

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

gdzie  $\vec{M}$  jest wypadkowym momentem siły; w przypadku wielu sił  $\vec{F}_i$  działających na dany obiekt jest on równy

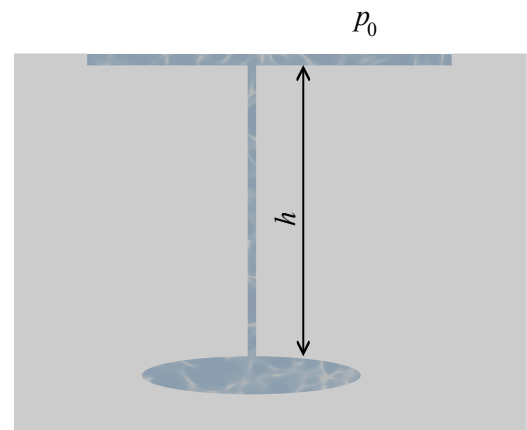
$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

gdzie  $\vec{r}_i$  jest wektorem o początku w punkcie, względem którego liczymy  $\vec{M}$ , oraz końcu w punkcie zaczepienia siły  $\vec{F}_i$ .

Powyżej  $\times$  jest iloczynem wektorowym; mamy:  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| |\sin \theta|$ , gdzie  $\theta$  jest kątem między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ; wektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  jest prostopadły do  $\vec{a}$  oraz  $\vec{b}$ , a jego zwrot jest dany przez regułę śruby prawoskrętnej (obracamy od  $\vec{a}$  do  $\vec{b}$ ). Dla iloczynu wektorowego obowiązuje zwykła reguła różniczkowania iloczynu:  $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$

### Zadanie 2

Rozważmy następujący model podwodnego gejzera.



Na głębokości  $h$  poniżej powierzchni bardzo płytkiego jeziora, w skałach, znajduje się jaskinia (zbiornik) całkowicie wypełniona wodą. Skały otaczające zbiornik mają temperaturę  $T_s$ . Te skały podgrzewają wodę w zbiorniku i w pewnym momencie zaczyna ona wrzeć. Para wodna całkowicie wypycha wodę z kanału łączącego jaskinię z jeziorem i wtedy następuje gwałtowne odparowanie części wody w zbiorniku, widoczne jako erupcja gejzera.

Ciśnienie powietrza tuż nad powierzchnią jeziora wynosi  $p_0$ , a temperatura wody w jeziorze jest równa  $T_j$ . Wysokość zbiornika jest znacznie mniejsza niż  $h$ . Objętość kanału łączącego jaskinię z jeziorem jest pomijalnie mała w porównaniu z objętością zbiornika, jest on jednak na tyle szeroki, że nie stawia oporu wylatującej parze. W trakcie erupcji woda z jeziora nie wpływa do kanału. Uwzględnij, że gęstość pary jest znacznie mniejsza niż gęstość wody. Przyjmij, że z gejzera wylatuje tylko para.

a) Jaka musi być temperatura  $T_s$ , aby opisane zjawisko mogło zajść?

b) Przyjmując, że w trakcie erupcji gejzera, wylatuje z niego masa  $m$  pary wodnej, wyznacz minimalną

ilość wody zgromadzonej w rozważanej jaskini tuż przed erupcją gejzera.

Pomiń ciepło dostarczane wodzie w trakcie erupcji.

c) Po erupcji ciśnienie w zbiorniku spada i woda z jeziora ponownie wypełnia zbiornik. Wiedząc, że odstęp czasu między erupcjami wynosi  $\Delta t$ , wyznacz średnią moc ciepła dostarczanego do wody.

Ciśnienie pary nasyconej o temperaturze  $T$  jest w rozpatrywanej sytuacji z dobrym przybliżeniem równe

$$p_w(T) = p_0 e^{\frac{L_m}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)},$$

gdzie  $R$  jest uniwersalną stałą gazową,  $L_m$  molowym ciepłem parowania wody pod ciśnieniem  $p_0$ ,  $T_0$  to temperatura wrzenia wody pod ciśnieniem  $p_0$ . Przyjmij, że gęstość wody nie zależy od temperatury i jest równa  $\rho$ . Przyjmij również, że ciepło właściwe wody nie zależy od temperatury (w zakresie występujących temperatur) i jest równe  $c_w$ .

Masa molowa wody wynosi  $M_w$ , przyspieszenie grawitacyjne  $g$ .

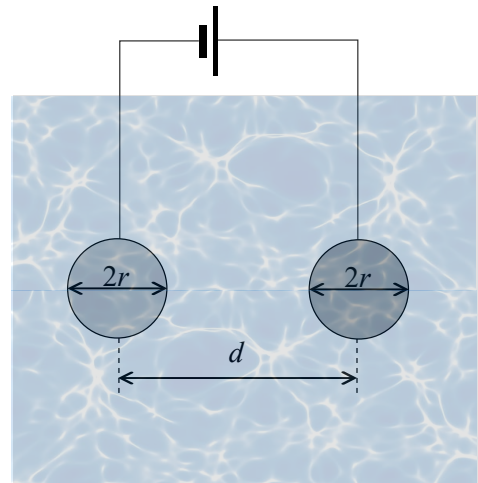
Podaj wyniki liczbowe przyjmując  $h = 200$  m,  $L_m = 41$  kJ/mol,  $T_0 = 373$  K,  $R = 8,3$  J/mol·K,  $c_w = 4,2$  kJ/(kg·K),  $M_w = 18$  g/mol,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>,  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $m = 50 \cdot 10^3$  kg,  $\Delta t = 1$  h,  $T_j = 293$  K,  $p_0 = 1000$  hPa.

### Zadanie 3

Dwie metalowe kulki o promieniu  $r$  każda są zanurzone w dużym zbiorniku ze słoną wodą o przewodnictwie właściwym  $\sigma$  i przenikalności dielektrycznej  $\epsilon$ . Kulki są podłączone za pomocą cienkich, izolowanych przewodów do baterii, a ich środki są odległe o  $d$  – patrz rysunek. Napięcie między nimi jest równe  $U$ .

Przyjmując, że pole elektryczne na zewnątrz kulek jest takie, jak pole od ładunków punktowych znajdujących się w środku tych kulek, wyznacz natężenie prądu płynącego przez wodę. Wynik przedstaw z dokładnością do wyrazów liniowych w  $\frac{r}{d}$ , tzn. w postaci  $A(1 + B\frac{r}{d})$ , gdzie  $A$  oraz  $B$  nie zależą od  $\frac{r}{d}$ ; oznacza to pominięcie wyrazów rzędu  $\frac{r^2}{d^2}$ .

Podaj wynik liczbowy dla  $U = 5$  V,  $d = 0,1$  m,  $r = 0,01$  m,  $\sigma = 10^{-2}$  1/( $\Omega \cdot \text{cm}$ ) = 1,0 / ( $\Omega \cdot \text{m}$ )  $\epsilon = \epsilon_w \cdot \epsilon_0$  gdzie  $\epsilon_w = 80$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  A<sup>2</sup>·s<sup>4</sup> / (kg · m<sup>3</sup>)



Uwagi:

1. Pole elektryczne pochodzące od punkowego ładunku  $q$  znajdującego się w jednorodnym ośrodku o przenikalności dielektrycznej  $\epsilon$  jest dane wzorem

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

gdzie  $\vec{r}$  jest wektorem od ładunku do punktu, w którym badamy pole elektryczne.

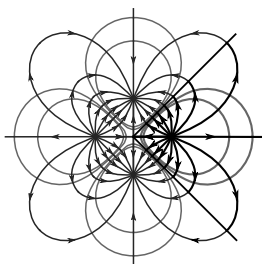
2. Gęstość prądu (czyli natężenie prądu na jednostkę powierzchni) w ośrodku o przewodnictwie właściwym  $\sigma$ , w punkcie, w którym pole elektryczne wynosi  $\vec{E}$ , jest równe  $\sigma \vec{E}$ . To oznacza, że natężenie prądu płynącego przez mały element powierzchni  $A$ , prostopadły do  $\vec{E}$ , jest równe  $\sigma A E$ .

3. Ścianki i powierzchnia wody w zbiorniku są w znacznie większej odległości od kulek, niż odległość między nimi.

4. Pole elektryczne pochodzące od przewodów można zaniedbać (wynika to z tego, że są one cienkie).

5. Dla  $|x| < 1$  zachodzi:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$$



# LXXII OLIMPIADA FIZYCZNA

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW III STOPNIA

### CZĘŚĆ TEORETYCZNA

#### Rozwiązanie zadania 1

Zgodnie z założeniem o krótkim czasie odbicia w ciągu tego czasu można pominąć siłę tarcia o podłoże, a uwzględnić tylko siłę reakcji ściany. Siła ta jest sprężysta i prostopadła do ściany (nie występuje tarcie o ścianę), zatem efektem jej działania jest tylko zmiana prostopadłej składowej prędkości kuli na przeciwną (kąąt odbicia jest równy kątowemu padania), natomiast nie nastąpi zmiana momentu pędu kuli. Ruch postępowy kuli stanie się więc niezgodny z jej obrotem, czyli rozpocznie się faza poślizgu. Po jej zakończeniu ruch kuli będzie jednostajny i prostoliniowy.

a)

Ponieważ po odbiciu kula będzie się początkowo obracała w kierunku zgodnym z kierunkiem obrotu przed odbiciem, działająca siła tarcia będzie miała składową skierowaną do ściany, a więc tor kuli po odbiciu będzie wygięty do ściany.

b)

Oznaczmy siłę tarcia o podłoże przez  $\vec{F}$ ; jej moment względem środka kuli jest równy  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , przy czym wektor  $\vec{r}$  jest skierowany w dół, od środka kuli do punktu zetknięcia z podłożem. Siła tarcia powoduje zmianę pędu kuli  $\vec{p}$  zgodnie z II zasadą dynamiki

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

a także momentu pędu  $\vec{L}$  zgodnie z II zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2)$$

Z równania (1) otrzymujemy

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3)$$

Ponieważ  $\vec{r}$  jest wektorem stałym, więc  $\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$  i z powyższego równania oraz z równania (2) wynika, że

$$\frac{d}{dt}(\vec{L} - \vec{r} \times \vec{p}) = \vec{0}, \quad (4)$$

czyli wektor  $\vec{K} = \vec{L} - \vec{r} \times \vec{p}$  jest stały w fazie poślizgu (jest to prawdą również dla następującej po poślizgu fazy toczenia).

(Stałość  $\vec{L} - \vec{r} \times \vec{p}$  oznacza w rzeczywistości stałość całkowitego momentu pędu względem chwilowego punktu styczności kuli z podłożem, co wynika z tego, że moment siły tarcia względem tego punktu jest równy  $\vec{0}$ ; znak  $-$  jest konsekwencją tego, że zdefiniowaliśmy  $\vec{r}$  jako od środka masy kuli do punktu styczności, natomiast w całkowitym momencie pędu ramię powinno być od punktu styczności do środka masy.)

Zauważmy, że ponieważ kierunek  $\vec{r}$  jest pionowy, to kierunek  $\vec{r} \times \vec{p}$  jest poziomy. A zatem skoro początkowo wektor  $\vec{L}$  był poziomy, to taki pozostanie – można wykluczyć możliwość, że w wyniku poślizgu oś obrotu kuli stanie się nachylona.

Wprowadźmy osie poziome  $x$  i  $y$ , przy czym oś  $x$  jest równoległa do ściany. Tuż po odbiciu kuli od ściany składowe wektora  $\vec{K}$  wynoszą

$$K_x = I\omega_0 \cos \alpha - rmv_0 \cos \alpha, \quad (5)$$

$$K_y = I\omega_0 \sin \alpha + rmv_0 \sin \alpha, \quad (6)$$

gdzie  $\omega_0$  jest początkową prędkością kątową obrotu kuli, równą  $v_0/r$ ; uwzględniliśmy tu, że kąt odbicia jest równy kątowi padania.

Po uwzględnieniu wyrażenia na  $\omega_0$  powyższe równania przyjmą postać

$$K_x = mv_0r \left( \frac{I}{mr^2} - 1 \right) \cos \alpha = -\frac{3}{5}mv_0r \cos \alpha, \quad (7)$$

$$K_y = mv_0r \left( \frac{I}{mr^2} + 1 \right) \sin \alpha = \frac{7}{5}mv_0r \sin \alpha. \quad (8)$$

W końcowej postaci wzorów uwzględniliśmy, że  $I = \frac{2}{5}mr^2$ .

Po ustaniu poślizgu składowe wektora  $\vec{K}$  są równe

$$K_x = -I\omega_1 \cos \beta - rmv_1 \cos \beta, \quad (9)$$

$$K_y = I\omega_1 \sin \beta + rmv_1 \sin \beta, \quad (10)$$

gdzie  $v_1$  jest końcową (tzn. po ustaniu poślizgu) prędkością kuli,  $\omega_1 = v_1/r$  odpowiednią prędkością kątową, natomiast  $\beta$  – kątem między  $\vec{v}_1$  a prostopadłą do ściany. Po podstawieniach powyższe równania przyjmą postać

$$K_x = -mv_1r \left( \frac{I}{mr^2} + 1 \right) \cos \beta = -\frac{7}{5}mv_1r \cos \beta, \quad (11)$$

$$K_y = mv_1r \left( \frac{I}{mr^2} + 1 \right) \sin \beta = \frac{7}{5}mv_1r \sin \beta. \quad (12)$$

Z przyrównania równań (7) oraz (11) mamy

$$v_0 \left( \frac{I}{mr^2} - 1 \right) \cos \alpha = -v_1 \left( \frac{I}{mr^2} + 1 \right) \cos \beta, \quad (13)$$

czyli

$$\frac{3}{5}v_0 \cos \alpha = \frac{7}{5}v_1 \cos \beta, \quad (14)$$

natomiast z przyrównania (8) oraz (12) mamy

$$v_0 \sin \alpha = v_1 \sin \beta. \quad (15)$$

Ostatecznie

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1 + \frac{I}{mr^2}}{1 - \frac{I}{mr^2}} \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{3} \operatorname{tg} \alpha, \quad (16)$$

$$v_1 = v_0 \sqrt{\left( \frac{1 - \frac{I}{mr^2}}{1 + \frac{I}{mr^2}} \cos \alpha \right)^2 + \sin^2 \alpha} = v_0 \sqrt{\left( \frac{3}{7} \cos \alpha \right)^2 + \sin^2 \alpha} \quad (17)$$

Jak widać  $\beta > \alpha$ , co jest zgodne ze stwierdzeniem z punktu a), że tor kuli odchyli się do ściany.

**Komentarz sprawdzającego:** Oddane rozwiązania wpadały zasadniczo w dwie kategorie - część zawodników znajdowała kombinację wektorów prędkości i prędkości kątowej zachowaną podczas ruchu (rozwiązanie wzorcowe), część zaś analizowała prędkość punktu styku kuli podłogą, znajdowała kierunek i zwrot siły tarcia i stąd dalej obliczała zmiany prędkości i prędkości kątowej kuli. W drugim przypadku pewną subtelnością było wykazanie, że siła tarcia działa przez cały czas w tym samym kierunku. Pośród najczęstszych błędów wymienić można problemy z przechodzeniem pomiędzy wektorami prędkości obrotowej, a postępowej (jawny bądź ukryty iloczyn wektorowy). Problemy sprawiało też czasem wyznaczenie kierunku działania siły tarcia, oraz znalezienie warunku ustania poślizgu.

### Punktacja zadania 1.

Zauważenie, wraz z uzasadnieniem, że tor kuli odchyli się do ściany .....	2 pkt
Wyprowadzenie faktu, że wektor $\vec{K} = \vec{L} - \vec{r} \times \vec{p}$ jest stały w fazie poślizgu .....	2 pkt
Składowe wektora $\vec{K}$ tuż po zderzeniu (wzory (7-8) lub równoważne; dopuszczalne są obie postacie: z podstawieniem $I = \frac{2}{5}mr^2$ lub bez tego podstawienia) .....	2 pkt
Składowe wektora $\vec{K}$ po ustaniu poślizgu (wzory (11-12) lub równoważne; dopuszczalne są obie postacie: z podstawieniem $I = \frac{2}{5}mr^2$ lub bez tego podstawienia) .....	1 pkt
Wzór (16) lub równoważny określający kierunek poruszania się kuli po ustaniu poślizgu	1 pkt
Prędkość kuli po ustaniu poślizgu (wzór (17) lub równoważny) .....	2 pkt

### Rozwiązanie zadania 2

a) Ciśnienie wody na głębokości  $h$  jest równe

$$p_h = p_0 + \rho gh. \quad (18)$$

Aby woda w zbiorniku zaczęła wrzeć, musi osiągnąć ona temperaturę wrzenia pod takim ciśnieniem. Ta temperatura wynosi

$$T_h = \frac{1}{\frac{1}{T_0} - \frac{R}{L_m} \ln \frac{p_h}{p_0}}. \quad (19)$$

Aby skały mogły nagrzać wodę do temperatury  $T_h$ , ich temperatura nie może być mniejsza od  $T_h$ . Zatem

$$T_s \geq \frac{1}{\frac{1}{T_0} - \frac{R}{L_m} \ln \frac{p_0 + \rho gh}{p_0}}. \quad (20)$$

Dla podanych danych liczbowych otrzymujemy w przybliżeniu

$$T_s \geq 484 \text{ K}. \quad (21)$$

b)

Gdy woda zaczyna wrzeć, powstająca para wypycha wodę z kanału i ciśnienie spada do  $p_0$ . Przegrzana woda odparowuje, w wyniku czego ochładza się. Z bilansu energii mamy

$$c_w (T_h - T_0) M = L_m \frac{m}{M_w}, \quad (22)$$

gdzie  $M$  to szukana masa wody w zbiorniku. Uwzględniliśmy tu, że woda wrze do momentu, aż osiągnie temperaturę  $T_0$ , stąd zmiana jej temperatury w trakcie erupcji wynosi  $T_h - T_0$ . Zatem w jawnej postaci otrzymujemy

$$M = \frac{L_m m / M_w}{c_w \left( \frac{1}{T_0} - \frac{R}{L_m} \ln \frac{p_0 + \rho g h}{p_0} - T_0 \right)} \quad (23)$$

Dla podanych danych liczbowych otrzymujemy w przybliżeniu

$$M = 244 \cdot 10^3 \text{ kg}. \quad (24)$$

c)

Po erupcji w zbiorniku pozostaje woda o masie  $M - m$  i o temperaturze  $T_0$ , która zostanie uzupełniona masą  $m$  wody z jeziora o temperaturze  $T_j$ . Ta woda musi być podgrzana do temperatury  $T_h$ , czyli trzeba jej dostarczyć energię

$$c_w (T_h - T_0) (M - m) + c_w (T_h - T_j) m = c_w (T_h - T_0) M + c_w (T_0 - T_j) m = \quad (25)$$

$$= \left( \frac{L_m}{M_w} + c_w (T_0 - T_j) \right) m. \quad (26)$$

Skoro czas dostarczania ciepła wynosi  $\Delta t$ , to średnia moc jest równa

$$P = \frac{\left( \frac{L_m}{M_w} + c_w (T_0 - T_j) \right) m}{\Delta t}. \quad (27)$$

Dla podanych danych liczbowych otrzymujemy w przybliżeniu

$$P = 36 \text{ MW}. \quad (28)$$

Uwaga:

do wydobywania pary na powierzchnię, trzeba jej dostarczyć dodatkowo energię co najmniej

$$mgh.$$

Dla  $h = 200$  m jest to energia wystarczająca do podgrzania wody o około 0,5 K, zatem można tę energię pominąć.

### Punktacja zadania 2.

Warunek na temperaturę  $T_s$  (wzór (20) lub równoważny) wraz z wyprowadzeniem ... 2 pkt.  
 Bilans energii (wzór (22) lub równoważny) wraz z uzasadnieniem ..... 2 pkt.  
 Szukana masa wody (wzór (23) lub równoważny) ..... 1 pkt  
 Energia, którą należy dostarczyć do wody (wzór (26) lub równoważny) ..... 2 pkt  
 Średnia moc w trakcie podgrzewania wody (wzór (27) lub równoważny) ..... 1 pkt

Wyniki liczbowe dotyczące punktów a), b), c) ..... 2 pkt  
(2 pkt przy 3 poprawnych wynikach, 1 pkt przy jednym poprawnym wyniku)

### Rozwiązanie zadania 3

Zgodnie z treścią zadania, pole elektryczne w punkcie P, znajdującym się na zewnątrz obu kulek, jest dane wzorem

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon |\vec{r}_1|^3} \vec{r}_1 - \frac{q}{4\pi\epsilon |\vec{r}_2|^3} \vec{r}_2. \quad (29)$$

gdzie  $\vec{r}_1$  jest wektorem od środka pierwszej kulki do punktu P, a  $\vec{r}_2$  jest wektorem od środka drugiej kulki do punktu P. Uwzględniliśmy tu, że sumaryczny ładunek na obu kulkach musi być równy zero i oznaczyliśmy ładunek na jednej z nich przez  $q$ .

Powyższy wzór odpowiada sytuacji, gdy na powierzchni każdej z kulek ładunek jest rozłożony równomiernie.

Zgodnie z powyższym, potencjał pola elektrycznego w punkcie P jest równy

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon r_2}. \quad (30)$$

Nie jest to ścisły wzór, gdyż w rzeczywistości pole elektryczne pierwszej kulki spowoduje przemieszczenie ładunków na drugiej, a pole od drugiej – przemieszczenie ładunków na pierwszej. Łatwo jest to zauważyć, wyznaczając wynikające z powyższego wzoru potencjały w najbardziej odległym oraz najmniej odległym od drugiej kulki punktach kulki pierwszej

$$V_{\text{najbliżej}} = \frac{q}{4\pi\epsilon r} - \frac{q}{4\pi\epsilon (d-r)},$$

$$V_{\text{najdalej}} = \frac{q}{4\pi\epsilon r} - \frac{q}{4\pi\epsilon (d+r)}.$$

Ponieważ kulka jest metalowa, te potencjały powinny być równe, a nie są. Ich różnica wynosi

$$V_{\text{najdalej}} - V_{\text{najbliżej}} = \frac{q}{4\pi\epsilon (d-r)} - \frac{q}{4\pi\epsilon (d+r)} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{2r}{d^2 - r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \frac{2r^2}{d^2 - r^2}.$$

W przybliżeniu  $\frac{r^2}{d^2} \ll 1$  ta różnica jest równa 0.

W rozważanym przybliżeniu napięcie pomiędzy najbardziej odległymi punktami kulek jest równe

$$U_{\text{najdalsze}} = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon r} - \frac{q}{4\pi\epsilon (d+r)} \right) - \left( \frac{-q}{4\pi\epsilon r} + \frac{q}{4\pi\epsilon (d+r)} \right) = \quad (31)$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d+r} \right) \approx \frac{q}{2\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \left( 1 - \frac{r^2}{d^2} \right) \right), \quad (32)$$

natomiast napięcie pomiędzy najbliższymi punktami kulek jest równe

$$U_{\text{najbliższe}} = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon r} - \frac{q}{4\pi\epsilon (d-r)} \right) - \left( \frac{-q}{4\pi\epsilon r} + \frac{q}{4\pi\epsilon (d-r)} \right) = \quad (33)$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d-r} \right) \approx \frac{q}{2\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \left( 1 + \frac{r^2}{d^2} \right) \right). \quad (34)$$

W obu powyższych przypadkach w przybliżeniu  $\frac{r^2}{d^2} \ll 1$  otrzymujemy, że napięcie między kulkami wynosi

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon r} \left( 1 - \frac{r}{d} \right). \quad (35)$$

Z otrzymanego wyrażenia na  $U$  mamy

$$q = \frac{2\pi\epsilon Ur}{1 - \frac{r}{d}} \approx \quad (36)$$

$$\approx 2\pi\epsilon Ur \left( 1 + \frac{r}{d} \right). \quad (37)$$

Natężenie prądu płynącego między kulkami wyznaczamy zauważając, że rozważaną sytuację można potraktować jako złożenie dwóch przypadków: a) prąd wypływa z kulki o ładunku  $q$  i płynie do nieskończenie odległego sferycznego, metalowego uziemienia; b) prąd płynie z nieskończenie odległego sferycznego, metalowego uziemienia do kulki o ładunku  $-q$  (przesuniętej o  $d$  względem pierwszej). W każdym z tych przypadków gęstość płynącego prądu w odległości  $r$  od środka pojedynczej kulki wynosi

$$i = \sigma E = \quad (38)$$

$$= \sigma \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{\sigma U}{2r} \left( 1 + \frac{r}{d} \right). \quad (39)$$

Czyli całkowite natężenie wypływającego/wpływającego prądu wynosi

$$I = 4\pi r^2 i = \quad (40)$$

$$= 2\pi\sigma Ur \left( 1 + \frac{r}{d} \right). \quad (41)$$

Jest to jednocześnie natężenie prądu płynącego między kulkami w rozpatrywanym przez nas przybliżeniu. Natomiast przy zastosowaniu nieprzybliżonego wzoru (32) dostajemy

$$I_{\text{najdalej}} = 2\pi\sigma Ur \left( 1 + \frac{r}{d} \left( 1 - \frac{r}{d} \right) \right), \quad (42)$$

zaś wzoru (34):

$$I_{\text{najbliżej}} = 2\pi\sigma Ur \left( 1 + \frac{r}{d} \left( 1 + \frac{r}{d} \right) \right). \quad (43)$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy w przybliżeniu

$$I = 0,35 \text{ A}. \quad (44)$$

**Komentarz sprawdzającego:** Żadna z osób uczestniczących nie zwróciła uwagi, że różnica potencjałów jest zależna od tego, czy badamy napięcie między najbliższymi czy najdalszymi punktami na kulach. Trudność sprawiła metoda wyznaczenia natężenia przepływającego prądu, wiele osób całkowicie natężenie prądu po arbitralnie wybranych powierzchniach, co było znaczącym utrudnieniem, a nie było konieczne do rozwiązania zadania. Pojawiały się błędy w przybliżeniu wyniku lub przybliżenie nie było w ogóle uwzględnione.



**Punktacja zadania 3.**

Analiza różnic potencjałów w zależności od wyboru punktów pomiaru na kulach (wzory (32) oraz (34) lub równoważne) .....	2 pkt
Różnica potencjałów między kulkami w rozważanym przybliżeniu (wzór (35) lub równoważny) .....	2 pkt
Wyznaczenie ładunku $q$ przez napięcie między kulkami (wzór (37) lub równoważny) ..	1 pkt
Całkowite natężenie prądu płynącego między kulkami (wzór (42) lub (43)) .....	2 pkt
Przedstawienie wyniku w postaci liniowej (wzór (41) lub równoważny) .....	2 pkt
Wynik liczbowy (wzór (44)) .....	1 pkt