

LXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA

CZEŚĆ II

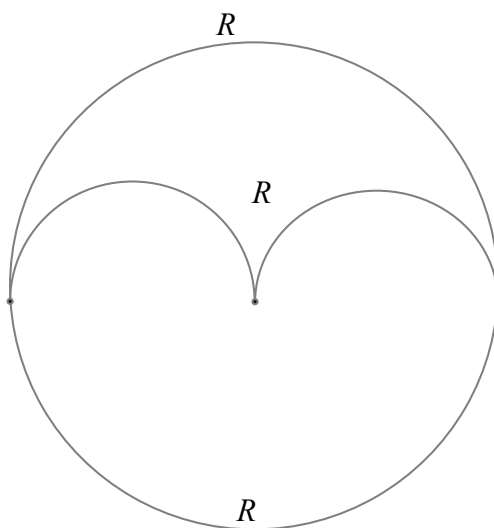
ZADANIA CZĘŚCI II (termin wysyłania rozwiązań — 17 listopada 2023 r.)

ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1.

Obwód elektryczny przedstawiony na rysunku składa się ze sztywnych przewodów w kształcie półokręgów o promieniach r oraz $r/2$.



Wartości oporu elektrycznego górnego półokręgu, dolnego, oraz środkowej części obwodu, są takie same i równe R . Cały układ leży w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do jednorodnego, zmiennego pola magnetycznego o indukcji $B(t) = B_0 \cos \omega t$, gdzie B_0 oraz ω są stałymi. Wyznacz średnią moc ciepła wydzielającego się w obwodzie. Pomiń pole magnetyczne wytwarzane przez prąd płynący w obwodzie.

Zadanie T2.

Samochód jedzie po płaskim, poziomym nabrzeżu z prędkością v zbliżając się do wody, przy czym kierunek prędkości tworzy z normalną do prostej krawędzi nabrzeża kąt α . Współczynnik tarcia kół samochodu o podłoże wynosi f . Kierowca może skręcać kierownicą (co określa promień skrętu samochodu, czyli promień okręgu, po którym poruszałby się samochód, gdyby ustawienie kierownicy pozostało niezmienione), korzystać z hamulców oraz z pedału przyspieszenia. Może też użyć biegu wstecznego.

Opisz, jakie manewry powinien wykonywać kierowca, aby jak najmniej zbliżyć się do wody. Wyznacz najmniejszą odległość od krawędzi nabrzeża, przy której musi on zacząć wykonywać te manewry, by nie spaść z tej krawędzi. Wyznacz też promień skrętu samochodu w chwili rozpoczęcia wspomnianych manewrów, oraz promień skrętu samochodu tuż przed maksymalnym zbliżeniem się do wody (jeśli samochód w którymś z tych przypadków ma poruszać się po prostej, jawnie to napisz). Przyspieszenie ziemskie jest równe g .

Pomiń rozmiary liniowe samochodu i przyjmij, że promień skrętu może być dowolnie mały. Uwzględnij, że samochód nie powinien wpaść w poślizg.

Zadanie T3.

Balon obserwacyjny o masie całkowitej (wraz z wypełniającym go helem, gondolą oraz załogą) M unosi się na uwięzi na wysokości h nad ziemią, gdzie ciśnienie wynosi p_1 , a temperatura jest równa T_1 . Balon jest wypełniony n molami helu o temperaturze początkowo równej temperaturze otoczenia. Powłoka balonu jest wiotka. Masa liny (części łączącej ziemię z gondolą) jest równa m i nie jest pomijalna w porównaniu z M . Nie wieje wiatr.

Wyznacz pracę W , jaką należy wykonać, aby ściągnąć balon na ziemię, gdzie ciśnienie powietrza wynosi p_2 . Zakładamy, że ściągnięcie jest na tyle wolne, że można pominąć opór powietrza, ale na tyle szybkie, że wypełniający balon hel nie wymienia ciepła z otoczeniem, tzn. przemiana helu jest adiabatyczna i spełnia równanie $pV^\kappa = \text{const}$, gdzie $\kappa = (C_V + R)/C_V$, przy czym $C_V = \frac{3}{2}R$ jest ciepłem molowym helu przy stałej objętości, natomiast R jest uniwersalną stałą gazową. Zakładamy również, że podczas ściągnięcia balonu lina jest stale naprężona. Pomiń gęstość powietrza w porównaniu z gęstością powłoki i gondoli. Masy molowe helu i powietrza to odpowiednio M_{He} oraz M_p . Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Podaj wynik liczbowy dla $n = 50000$ moli, $h = 5000$ m, $p_1 = 50$ kPa, $T_1 = 280$ K, $p_2 = 100$ kPa, $M = 500$ kg, $m = 200$ kg i przyjmując, że $R = 8,31$ J/(mol·K), $g = 9,81$ m/s², $M_{\text{He}} = 4$ kg/kmol oraz $M_p = 29$ kg/kmol.

Zadanie T4 - numeryczne.

Na unieruchomionej kuli o promieniu R , stojącej na płaskiej, poziomej podłodze, położono małe ciało. Współczynnik tarcia ciała o kulę wynosi μ . Ciało odsuwano powoli od wierzchołka kuli, aż samo zaczęło się z niej zsuwać, a następnie oderwało się od kuli i spadło na podłogę w odległości d od punktu styczności kuli z podłogą. W żadnym momencie ciało nie toczyło się po kuli ani nie przewracało.

Wyznacz numerycznie zależność d od μ w zakresie μ od 0 do 1 i przedstaw ją na wykresie. Przyjmij $R = 1$ m oraz przyspieszenie grawitacyjne $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Podaj wartości d dla $\mu = 0$ oraz $\mu = 1$.

Pomiń opór powietrza.

Uwaga:

Rozwiązanie powinno zawierać:

- (i) wzory używane w rozwiązaniu wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem;
- (ii) opis zastosowanego algorytmu;
- (iii) opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz ze sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników;
- (iv) wykres oraz wartości liczbowe, o których mowa w treści zadania
- (v) jakościowe omówienie otrzymanych wyników.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub gotowych programów wyznaczających poszukiwany czas po podaniu toru.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Należy przesłać rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde z zadań doświadczalnych można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Zadanie D1.

Masz do dyspozycji:

- pięć monet jednozłotowych, każda o masie m i gęstości ρ_m ,
- paski papieru milimetrowego o szerokości 2 cm,
- szczelne, cienkie, lekkie woreczki foliowe,
- naczynie wypełnione wodą.

Wyznacz współczynnik tarcia statycznego μ papieru o woreczek foliowy. Zaniedbaj ciężar woreczka foliowego oraz objętość folii, z której jest wykonany. Przyjmij, że $m = 5,00$ g, $\rho_m = 8950$ kg/m³, a gęstość wody wynosi $\rho_w = 1000$ kg/m³.

Zadanie D2.

Masz do dyspozycji:

- rolkę przezroczystej taśmy klejącej o znanej łącznej długości,
- przeciwsłoneczne okulary polaryzacyjne (polaryzujące liniowo przechodzące światło),
- kolorowy (RGB) wyświetlacz emitujący światło spolaryzowane liniowo, na przykład smartfon lub monitor komputerowy, na którym możesz wyświetlać dowolne kolory lub wzory,
- linijkę.

Wyznacz różnicę współczynników załamania światła przechodzącego przez folię taśmy klejącej dla polaryzacji światła wzdłuż oraz w poprzek taśmy. Pomiaru dokonaj dla światła czerwonego (przyjmij długość fali: 640 nm), zielonego (530 nm) i niebieskiego (460 nm).

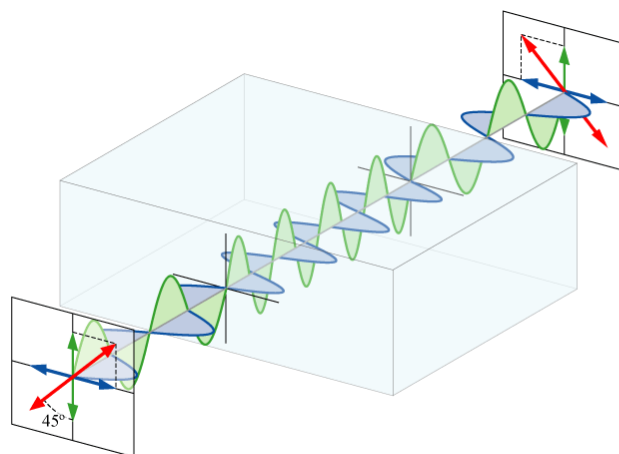
UWAGA 1: Zaniedbaj znak tej różnicy – wyznacz jej wartość bezwzględną.

UWAGA 2: Przyjmij, że różnica współczynników załamania światła jest na tyle mała, że po przejściu przez jedną warstwę taśmy wiązki światła o różnych polaryzacjach są opóźniane względem siebie o co najwyżej połowę długości fali.

UWAGA 3: Przyjmij, że folia zajmuje połowę objętości taśmy klejącej, a pozostałą połowę zajmuje klej niewpływający na polaryzację przechodzącego światła.

UWAGA 4: Nie wszystkie wyświetlacze emitują światło spolaryzowane liniowo. Polaryzację możesz sprawdzić przy pomocy okularów polaryzacyjnych.

WSKAZÓWKA: Światło spolaryzowane liniowo przechodzące prostopadłe przez powierzchnię taśmy możesz rozłożyć na składowe o polaryzacji wzdłuż taśmy i polaryzacji w poprzek taśmy. Światło spolaryzowane liniowo to światło, którego wektor pola elektrycznego drga wzdłuż wybranej osi, zwanej osią polaryzacji. Rozważ, jak zmienia się wektor pola elektrycznego podczas przechodzenia przez ośrodek, w którym światło rozchodzi się z różnymi prędkościami dla dwóch prostopadłych polaryzacji.



Obraz źródłowy oraz licencja: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Waveplate.png>

Rysunek 1: Opóźnienie światła o pionowej polaryzacji względem światła o poziomej polaryzacji może (na przykład) spowodować zmianę kierunku osi polaryzacji światła.

Zadanie D3.

Masz do dyspozycji:

- smartfon o znanej masie, z akcelerometrem i miernikiem prędkości kątowej (żyroskop prędkościowy) oraz aplikacją umożliwiającą rejestrowanie i zapisywanie składowych przyspieszenia oraz prędkości kątowej smartfonu,
- lekką tekturę,
- gładki poziomy blat, na przykład szklany lub granitowy,

- dwustronną taśmę klejącą,
- papier milimetrowy,
- nożyczki.

Wyznacz:

- kinetyczny współczynnik tarcia tektury o blat,
- moment bezwładności smartfonu wokół osi prostopadłej do ekranu oraz przechodzącej przez środek masy smartfonu.

UWAGA 1: Możesz zaniedbać masę tektury, jeśli użyjesz jej niewielkiej ilości.

UWAGA 2: Analizę zebranych danych, niezbędne obliczenia oraz wykresy możesz wykonać przy użyciu komputera. Rozwiązanie powinno wtedy zawierać również opis zastosowanego algorytmu oraz opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania.

WSKAZÓWKA 1: Przykładowa aplikacja działająca w systemach operacyjnych Android oraz iOS, umożliwiająca zapis zebranych danych pomiarowych do pliku: „phyphox” (<https://phyphox.org/>).

WSKAZÓWKA 2: Smartfon możesz zważyć lub sprawdzić jego masę w specyfikacji.

ROZWIĄZANIA

Rozwiązanie zadania T1

Oznaczmy cyfrą 1 górny półokrąg, cyfrą 2 – dolny półokrąg, a cyfrą 3 pozostałą część obwodu. Pole obszaru ograniczonego przez przewody 1 oraz 3 jest równe

$$S_{13} = \frac{1}{2}\pi r^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi r^2,$$

natomiast pole obszaru ograniczonego przez przewody 2 oraz 3 wynosi

$$S_{23} = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi r^2.$$

Zgodnie z prawem indukcji Faradaya, siły elektromotoryczne indukowane odpowiednio w obwodach 13 oraz 23 są równe

$$\mathcal{E}_{13} = -\frac{\Delta(S_{13}B)}{\Delta t} = \frac{1}{4}\pi r^2 \omega B_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_{23} = -\frac{\Delta(S_{23}B)}{\Delta t} = \frac{3}{4}\pi r^2 \omega B_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

gdzie przyjęliśmy $\Delta t \rightarrow 0$ oraz skorzystaliśmy z analogii z mechanicznymi drganiami harmonicznymi.

Oznaczmy przez I_1 natężenie prądu płynącego w przewodzie 1, a przez I_2 natężenie prądu płynącego w przewodzie 2, przy czym dodatnie wartości odpowiadają prądom płynącym zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Wtedy natężenie prądu płynącego przez przewód 3 jest równe $I_1 - I_2$ (dodatnie, gdy płynie - według kierunków na kartce/ekranie - od prawej do lewej).

Ponieważ suma napięć na poszczególnych elementach oczka obwodu jest równa całkowitej sile elektromotorycznej indukowanej w tym oczku, mamy

$$I_1 R + (I_1 - I_2) R = \mathcal{E}_{13}, \quad (3)$$

$$I_2 R - (I_1 - I_2) R = \mathcal{E}_{23}. \quad (4)$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$I_1 = \frac{2\mathcal{E}_{13} + \mathcal{E}_{23}}{3R},$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_{13} + 2\mathcal{E}_{23}}{3R}.$$

Po uwzględnieniu wzorów na \mathcal{E}_{13} oraz \mathcal{E}_{23} dostaniemy

$$I_1 = \frac{5}{12} \pi \frac{\omega B_0 r^2}{R} \sin \omega t, \quad (5)$$

$$I_2 = \frac{7}{12} \pi \frac{\omega B_0 r^2}{R} \sin \omega t, \quad (6)$$

$$I_1 - I_2 = -\frac{2}{12} \pi \frac{\omega B_0 r^2}{R} \sin \omega t. \quad (7)$$

Średnia moc ciepła wydzielającego się w obwodzie jest równa

$$\begin{aligned} P_{\text{sr}} &= R \langle I_1^2 \rangle + R \langle I_2^2 \rangle + R \langle (I_1 - I_2)^2 \rangle = \\ &= \frac{78}{144} \frac{\pi^2 \omega^2 B_0^2 r^4}{R} \langle \sin^2 \omega t \rangle, \end{aligned}$$

gdzie nawiasami $\langle \dots \rangle$ oznaczyliśmy średnią (w czasie). Ponieważ dla długich czasów (lub po całkowitej wielokrotności okresu) mamy $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, ostatecznie (po uproszczeniu ułamka) otrzymujemy

$$P_{\text{sr}} = \frac{13}{48} \frac{\pi^2 \omega^2 B_0^2 r^4}{R}. \quad (8)$$

Punktacja zadania T1.

Prawo Faradaya zastosowane do co najmniej dwóch oczek obwodu (wzory (1) i (2) lub równoważne) 2 pkt.

Suma napięć (II prawo Kirchhoffa) dla co najmniej dwóch oczek obwodu (wzory (3) i (4) lub równoważne) 2 pkt.

Natężenia prądów płynących w obwodzie (wzory (5)–(7) lub równoważne; wystarczają dwa wyniki) 4 pkt.

Średnia moc ciepła wydzielana w obwodzie (wzór (8) lub równoważny) 2 pkt.

Rozwiązanie zadania T2

Ponieważ współczynnik tarcia kół samochodu o nabrzeże wynosi f , maksymalne przyspieszenie z jakim może poruszać się samochód wynosi gf ; aby samochód jak najmniej zbliżył się do wody, to przyspieszenie powinno być skierowane prostopadle do krawędzi nabrzeża, ze zwrotem „od” wody. Taki efekt kierowca może osiągnąć skręcając kierownicę i jednocześnie wciskając pedał hamulca. Promień skrętu i nacisk na hamulec powinien stale się zmieniać, tak by wypadkowa siła tarcia była taka jak opisano. Zbyt mocne przyciśnięcie hamulca lub zbyt mocne skrócenie kierownicy może doprowadzić do wpadnięcia w poślizg, a w konsekwencji do zmniejszenia wartości siły tarcia i zmiany jej kierunku na nieoptymalny (stanie się on przeciwny do prędkości samochodu, która nie jest prostopadła do linii brzegowej).

Wyberzmy układ współrzędnych, w którym oś x jest wzdłuż prostej brzeg–woda, a oś y prostopadła do niej, o zwrocie od samochodu w stronę wody. W takim układzie początkowe (w chwili rozpoczęcia manewrów) prędkości samochodu wynoszą

$$v_{0x} = v \sin \alpha, v_{0y} = v \cos \alpha.$$

Oczekiwane optymalne przyspieszenie samochodu ma składowe

$$a_x = 0, a_y = -gf.$$

To oznacza, że ruch samochodu od momentu rozpoczęcia manewrów ($t = 0$) do momentu największego zbliżenia do wody jest parabolą

$$x = x_0 + vt \sin \alpha, y = y_0 + vt \cos \alpha - \frac{1}{2}gt^2, \quad (9)$$

gdzie x_0 oraz y_0 odpowiadają położeniu początkowemu.

Maksymalna wartość y odpowiada chwili $t = v \cos \alpha / (gf)$ i jest równa

$$y_{\max} = y_0 + \frac{(v \cos \alpha)^2}{2gf}.$$

Zatem kierowca powinien rozpocząć wykonywać manewry najpóźniej w odległości

$$\frac{(v \cos \alpha)^2}{2gf} \quad (10)$$

od wody.

Rzut optymalnego przyspieszenia na kierunek początkowej prędkości jest równy

$$a_{\parallel} = -gf \cos \alpha. \quad (11)$$

To jest opóźnienie, jakie powinniśmy mieć początkowo w wyniku użycia hamulców.

Rzut optymalnego przyspieszenia na kierunek prostopadły do początkowej prędkości jest równy (przyjmując zwrot zgodny z rosnącym α)

$$a_{\perp} = gf \sin \alpha. \quad (12)$$

To przyspieszenie powinniśmy osiągnąć skręcając kierownicą – jest to przyspieszenie dośrodkowe, a zatem spełniające związek

$$\frac{v^2}{r_0} = a_{\perp}. \quad (13)$$

Zatem szukany promień skrętu w chwili rozpoczęcia wykonywania manewrów jest równy

$$r_0 = \frac{v^2}{gf \sin \alpha}. \quad (14)$$

(Warto tu zwrócić uwagę, że zwrot wektora przyspieszenia przyspieszenia dośrodkowego powinien być „od” linii brzegowej, zatem kierowca powinien skręcać kierownicę „od” wody, tzn. przy założeniu, że $\alpha > 0$ – w prawo.)

Zauważmy, że dla α dążącego do 0 otrzymane r_0 dąży do nieskończoności, co oznacza ruch po prostej. Nie ma w tym nic dziwnego, bo $\alpha = 0$ oznacza prędkość prostopadłą do linii brzeg–woda – w takim przypadku powinniśmy użyć wyłącznie hamulca i nie skręcać kierownicy.

W chwili największego zbliżenia do wody samochód porusza się równoległe do niej z prędkością $v \sin \alpha$; optymalne przyspieszenie jest prostopadłe do tej prędkości, a zatem w całości odpowiada ono przyspieszeniu dośrodkowemu. Analogicznie jak poprzednio otrzymujemy promień skrętu tuż przed maksymalnym zbliżeniem do wody

$$r_{zb} = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{gf}. \quad (15)$$

Dla $\alpha = 0$ formalnie otrzymujemy $r_{zb} = 0$; zauważmy jednak, że w tym przypadku samochód w chwili maksymalnego zbliżenia się zatrzymuje, a więc nie można mówić o ruchu po okręgu.

Punktacja zadania T2.

Poprawny opis manewrów jakie powinny być wykonywane (skręcanie + hamowanie tak by wypadkowe przyspieszenie było prostopadłe do krawędzi nabrzeża i miało wartość gf) 2 pkt.
 Minimalna odległość od wody, przy której należy zacząć wykonywać manewry (wyrażenie (10) lub równoważne) 2 pkt.
 Promień okręgu, po którym będzie się poruszać samochód w chwili rozpoczęcia wspomnianych manewrów (wzór (14) lub równoważny), wraz z wyprowadzeniem 3 pkt.
 Promień okręgu, po którym będzie się poruszać samochód tuż przed maksymalnym zbliżeniem się do wody (wzór (15) lub równoważny), wraz z wyprowadzeniem 3 pkt.

Rozwiązanie zadania T3

Najpierw rozważymy pracę, jaką należy wykonać, aby ściągnąć sam balon, bez uwzględniania ciężaru liny.

Rozwiązanie A

Ponieważ balon jest ściągany powoli i nie ma wymiany ciepła między gazem w balonie a otoczeniem, szukana praca jest równa zmianie całkowitej energii: otoczenia (powietrza atmosferycznego), energii wewnętrznej helu w balonie, oraz energii grawitacyjnej balonu. Przyjmijmy, że V_2 , p_2 , T_2 to odpowiednio objętość, ciśnienie oraz temperatura helu dla balonu znajdującego się na powierzchni ziemi, a $V_1 = nRT_1/p_1$ to objętość helu, gdy balon znajduje się na wysokości h .

Energia otoczenia zmniejsza się o pracę wykonaną przez ciśnienie atmosferyczne; możemy sobie wyobrazić, że na początkowej wysokości, przy ciśnieniu p_1 , ściska ono balon od objętości V_1 do zera wykonując pracę $V_1 p_1$. Następnie balon (o objętości 0) jest przemieszczony tuż nad ziemię, a potem, przy ciśnieniu zewnętrznym p_2 ten balon jest rozprężany do objętości V_2 , przy czym powietrze atmosferyczne wykonuje pracę $-V_2 p_2$. Czyli zmiana energii otoczenia jest równa

$$-(V_1 p_1 - V_2 p_2). \quad (16)$$

(Chociaż przedstawiony powyżej proces przebiega inaczej niż proces rozważany w zadaniu, to stany początkowe i końcowe otoczenia w obu procesach są takie same, a więc otrzymany wzór na zmianę energii można stosować dla przypadku opisanego w zadaniu.)

Zmiana energii wewnętrznej gazu w balonie, zgodnie ze wzorem na energię wewnętrzną gazu doskonałego, jest równa

$$nC_V (T_2 - T_1) \quad (17)$$

Ponieważ ciężar balonu jest równy Mg , zmiana energii grawitacyjnej balonu jest wynosi

$$-Mgh. \quad (18)$$

Uwzględniając powyższe, całkowita praca wykonana przy przemieszczaniu balonu od wysokości h do wysokości 0 jest równa

$$W = -(V_1 p_1 - V_2 p_2) + nC_V (T_2 - T_1) - Mgh. \quad (19)$$

Z równania przemiany adiabatycznej możemy wyznaczyć objętość V_2

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\kappa}, \quad (20)$$

a korzystając dodatkowo z równania stanu gazu doskonałego $pV = nRT$, temperaturę T_2

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\kappa - 1}. \quad (21)$$

(Zauważmy, że w ogólności temperatura T_2 nie jest równa temperaturze powietrza nad powierzchnią ziemi.)

W sumie otrzymamy

$$W = \left(V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\kappa} p_2 - V_1 p_1 \right) + nC_V T_1 \left(\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\kappa - 1} - 1 \right) - Mgh = \quad (22)$$

$$= (p_1 V_1 + nC_V T_1) \left(\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\kappa - 1} - 1 \right) - Mgh = \quad (23)$$

$$= n(C_V + R) T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{R/(C_V + R)} - 1 \right) - Mgh. \quad (24)$$

Powyżej uwzględniliśmy, że $1/\kappa - 1 = C_V/(C_V + R) - 1 = -R/(C_V + R)$, oraz że $p_1 V_1 = nRT_1$.

Dodatkowo trzeba uwzględnić ciężar liny; zmiana jej energii to

$$W_{\text{liny}} = -\frac{1}{2}mgh, \quad (25)$$

gdyż początkowo środek ciężkości liny był na wysokości $\frac{1}{2}h$, a na końcu na wysokości 0.

Zatem całkowita praca wykonana przy ściąganiu balonu jest równa

$$W_{\text{całk}} = n(C_V + R)T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{R/(C_V+R)} - 1 \right) - Mgh - \frac{1}{2}mgh. \quad (26)$$

Po uwzględnieniu, że $C_V = \frac{3}{2}R$ otrzymamy

$$W_{\text{całk}} = \frac{5}{2}nRT_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right) - Mgh - \frac{1}{2}mgh.$$

Wynikiem liczbowym jest

$$W_{\text{całk}} = 63,5 \text{ MJ}. \quad (27)$$

Rozwiązanie B

Siła wyporu działająca na balon znajdujący się na wysokości y jest równa $V\rho g$, gdzie V jest objętością helu (równą objętości wypartego powietrza), natomiast ρ to gęstość powietrza na wysokości y . Ponieważ siła ciężkości jest równa Mg , siła wypadkowa działająca na balon, bez uwzględniania ciężaru liny oraz jej naprężenia, wynosi

$$F = V\rho g - Mg. \quad (28)$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę, że przy ściąganiu balonu musimy działać siłą przeciwnie skierowaną niż F , to praca potrzebna do zmiany wysokości, na której znajduje się balon, od y do $y + \Delta y$, gdzie Δy jest małe i ujemne, wynosi

$$\Delta W = -F\Delta y = \quad (29)$$

$$= -V\rho g\Delta y + Mg\Delta y. \quad (30)$$

Dla małej zmiany wysokości Δy można przyjąć, że gęstość ρ jest stała, a zatem obowiązuje standardowy wzór

$$\Delta p = -\rho g\Delta y, \quad (31)$$

gdzie Δp jest różnicą między ciśnieniami na wysokościach $y + \Delta y$ oraz y ; znak minus pojawia się dlatego, że ciśnienie maleje wraz ze wzrostem wysokości. To oznacza, że pracę ΔW możemy przepisać w postaci

$$\Delta W = V\Delta p + Mg\Delta y. \quad (32)$$

Zauważmy, że (dla małych zmian) $V\Delta p = \Delta(Vp) - p\Delta V$ ¹; wielkość $-p\Delta V$ jest pracą wykonaną przez siły zewnętrzne (ciśnienie powietrza) nad helum. Ponieważ mamy do czynienia z przemianą adiabatyczną, z zasady zachowania energii (I zasada termodynamiki) ta praca jest równa przyrostowi energii wewnętrznej helu

$$-p\Delta V = nC_V\Delta T, \quad (33)$$

¹ $\Delta(Vp) = (V + \Delta V)(p + \Delta p) - Vp = V\Delta p + p\Delta V + \Delta V\Delta p$. Jednak przy małych zmianach $\Delta V \ll V$, $\Delta p \ll p$, można więc pominąć człon $\Delta V\Delta p$.

gdzie ΔT jest odpowiednią zmianą temperatury helu.

Uwzględniając powyższe otrzymamy

$$\Delta W = \Delta(Vp) + nC_V\Delta T + Mg\Delta y. \quad (34)$$

Zatem całkowita praca wykonana przy przemieszczaniu balonu od wysokości h do wysokości 0 wynosi

$$W = (V_2p_2 - V_1p_1) + nC_V(T_2 - T_1) - Mgh, \quad (35)$$

co jest nieco inaczej zapisanym wzorem (19). Dalsza część tej wersji rozwiązania jest identyczna z częścią rozwiązania A poniżej wzoru (19).

Uwaga: Korzystając z równania stanu gazu doskonałego można przekształcić wyrażenie $V\rho$ do postaci nM_pT_h/T_p , gdzie T_h jest temperaturą helu w balonie, a T_p - temperaturą powietrza otaczającego balon. Dla zwykłych rozkładów temperatury w atmosferze będzie zachodzić $T_h/T_p \geq 1$ (np. przy założeniu, że zależność temperatury powietrza od ciśnienia jest dana przez równanie przemiany adiabatycznej), a zatem przy ściąganiu balonu na powierzchnię ziemi siła wyporu będzie rosła.

Rozwiązanie C

To rozwiązanie aż do wzoru (32) pokrywa się z rozwiązaniem B. Następnie można pracę W wyznaczyć wprost z równania (32) (zmieniliśmy tu Δ na d w celu podkreślenia, że operujemy na nieskończenie małych) przyrostach

$$dW = Vdp + Mgd y. \quad (36)$$

Uwzględniając równanie adiabaty $pV^\kappa = \text{const}$ otrzymamy $V = V_1p_1^{1/\kappa}p^{-1/\kappa}$, a zatem

$$dW = V_1p_1^{1/\kappa}p^{-1/\kappa}dp + Mgd y. \quad (37)$$

W wyniku całkowania powyższego wyrażenia (pierwszego członu w granicach od p_1 do p_2 , drugiego w granicach od h do 0) otrzymamy

$$W = V_1p_1 \frac{1}{1 - 1/\kappa} \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1 - 1/\kappa} - 1 \right) - Mgh. \quad (38)$$

Po uwzględnieniu wyrażenia na κ otrzymamy znowu równanie (24).

Punktacja zadania T3.

Rozwiązanie A

1. Zauważenie, że praca wykonana przy przemieszczeniu balonu jest równa sumie zmiany energii otoczenia (powietrza atmosferycznego), energii wewnętrznej helu w balonie i energii grawitacyjnej balonu 1 pkt.
2. Zmiana energii otoczenia (wzór (16) lub równoważny) 2 pkt.

3. Zmiana energii wewnętrznej helu (wzór (17) lub równoważny) 1 pkt.
4. Zmiana energii grawitacyjnej balonu (wzór (18) lub równoważny) 1 pkt.
5. Praca potrzebna do ściągnięcia balonu na ziemię bez uwzględnienia ciężaru liny, wyrażona przez parametry podane w treści zadania (wzór (24)) 2 pkt.
6. Uwzględnienie zmiany energii potencjalnej liny (wzór (25) lub równoważne podejście) 1 pkt.
7. Jawny wynik na pracę całkowitą potrzebną do ściągnięcia balonu na ziemię (wzór (26) lub wzór równoważny) 1 pkt.
8. Wynik liczbowy (wartość (27)) 1 pkt.

Rozwiązanie B

1. Siła, z jaką balon ciągnie linę (wzór (28) lub równoważny) 1 pkt.
2. Praca potrzebna do małej zmiany wysokości, na której znajduje się balon (wzór (30) lub równoważny) 1 pkt.
3. Praca wykonana przy małej zmianie wysokości, przy czym część związana z siłą wyporu jest wyrażona przez zmianę ciśnienia (wzór (32) lub równoważny) 1 pkt.
4. Praca wykonana przy całkowitym przemieszczaniu balonu (bez uwzględnienia ciężaru liny) wyrażona przez końcowe parametry helu (wzór (35) lub równoważny) 2 pkt.
5. Praca potrzebna do ściągnięcia balonu na ziemię, uwzględniająca tylko siłę wyporu i grawitację, wyrażona przez parametry podane w treści zadania (wzór (24)) 2 pkt.
6. Uwzględnienie zmiany energii potencjalnej liny (wzór (25) lub równoważne podejście) 1 pkt.
7. Jawny wynik na pracę całkowitą potrzebną do ściągnięcia balonu na ziemię (wzór (26) lub wzór równoważny) 1 pkt.
8. Wynik liczbowy (wartość (27)) 1 pkt.

Rozwiązanie C

1. Siła, z jaką balon ciągnie linę (wzór (28) lub równoważny) 1 pkt.
2. Praca potrzebna do małej zmiany wysokości, na której znajduje się balon (wzór (30) lub równoważny) 1 pkt.
3. Praca wykonana przy małej zmianie wysokości, przy czym część związana z siłą wyporu jest wyrażona przez zmianę ciśnienia (wzór (36) lub równoważny) 1 pkt.
4. Uwzględnienie we wzorze (36) równania adiabaty (wzór (37) lub równoważny) 1 pkt.
5. Praca potrzebna do ściągnięcia balonu na ziemię, uwzględniająca tylko siłę wyporu i grawitację, wyrażona przez parametry podane w treści zadania (wzór (24)) 3 pkt.

6. Uwzględnienie zmiany energii potencjalnej liny (wzór (25) lub równoważne podejście) 1 pkt.
7. Jawny wynik na pracę całkowitą potrzebną do ściągnięcia balonu na ziemię (wzór (26) lub wzór równoważny) 1 pkt.
8. Wynik liczbowy (wartość (27)) 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

1. Rozważania fizyczne i metoda numeryczna

Przyjmijmy że ciało porusza się po kuli (w płaszczyźnie pionowej) z prędkością v , a kąt jaki w danym momencie tworzy oś ciała – środek kuli z pionem to α . Siła nacisku ciała na kulę wynosi

$$N = mg \cos \alpha - m \frac{v^2}{R}, \quad (39)$$

gdzie drugi człon odpowiada sile odśrodkowej; v to prędkość. Gdy N staje się równe 0, ciało odrywa się od kuli i mamy do czynienia ze spadkiem swobodnym.

Siła działająca na ciało wzdłuż powierzchni kulki (do momentu oderwania się) wynosi

$$F = mg \sin \alpha - \mu N. \quad (40)$$

Na podstawie powyższego można napisać równania ruchu, my jednak rozważymy problem energetycznie.

Przy przesuwania się ciała po kuli o odległość Δs , zmiana jego energii kinetycznej ΔE_k jest równa pracy wykonanej nad nim przez siłę wypadkową $F\Delta s$. Ponieważ na powierzchni kuli mamy $\Delta s = R\Delta\alpha$, gdzie $\Delta\alpha$ jest zmianą kąta α , otrzymamy

$$\Delta E_k = (mg \sin \alpha - \mu N) R\Delta\alpha. \quad (41)$$

Wprowadzając wielkości $e_k = E_k/m$ oraz $n = N/m$ i uwzględniając, że $e_k = v^2/2$, otrzymamy równania

$$\Delta e_k = (g \sin \alpha - \mu n) R\Delta\alpha, \quad (42)$$

$$n = g \cos \alpha - \frac{2e_k}{R}. \quad (43)$$

Te równania można przekształcić do postaci iteracyjnej

$$n_{i+\frac{1}{2}} = g \cos \left(\alpha_i + \frac{\Delta\alpha}{2} \right) - \frac{2e_{ki}}{R}, \quad (44)$$

$$e_{k\ i+1} = e_{k\ i} + \left(g \sin \left(\alpha_i + \frac{\Delta\alpha}{2} \right) - \mu n_{i+\frac{1}{2}} \right) R\Delta\alpha, \quad (45)$$

przy czym mamy dodatkowo

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \Delta\alpha. \quad (46)$$

Początkowy kąt α , czyli α_0 jest odpowiada granicznej wartości, przy której rozpoczyna się ześlizgiwanie

$$\alpha_0 = \arctg \mu. \quad (47)$$

Początkowe e_k , czyli e_{k0} , jest równe 0, czyli

$$e_{k0} = 0. \quad (48)$$

Iterację kontynuujemy do takiego k , przy którym znajdzie

$$n_{k+\frac{1}{2}} \leq 0. \quad (49)$$

W tym miejscu ciało odrywa się od kuli.

Dalej mamy do czynienia z rzutem ukośnym, którego prędkość początkowa ma składowe

$$v_{py} = -v_k \sin \alpha_k, \quad (50)$$

$$v_{px} = v_k \cos \alpha_k, \quad (51)$$

gdzie

$$v_k = \sqrt{2e_{kk}}. \quad (52)$$

Początkowa wysokość, na jakiej było ciało, wynosi

$$h = R(1 + \cos \alpha_k)$$

a końcowa (powierzchnia podłogi) – jest równa 0.

Odległość, na jaką doleci ciało, możemy wyznaczyć analitycznie.

Czas t_s , w jakim ciało doleci do podłogi, spełnia warunek

$$|v_{py}| t_s + \frac{1}{2} g t_s^2 = h,$$

stąd

$$t_s = \frac{-|v_{py}| + \sqrt{|v_{py}|^2 + 2gh}}{g}, \quad (53)$$

gdzie wybraliśmy tylko fizyczne (dodatnie) rozwiązanie równania kwadratowego.

Odległość, jaką ciało przebędzie w trakcie rzutu ukośnego, jest równa $v_{px} t_s$; ponieważ w chwili oderwania się od kuli składowa pozioma położenia kuli jest równa $x_p = R \sin \alpha_k$, zatem

$$d = R \sin \alpha_k + v_{px} t_s. \quad (54)$$

(Ponieważ oczekujemy wyniku liczbowego, nie ma potrzeby podstawiania w powyższym wzorze wyrażenia (53).)

Odległość, jaką ciało przebędzie w rzucie ukośnym można też wyznaczyć numerycznie.

Zauważmy, że dla $\mu = 0$ zagadnienie można rozwiązać ściśle (analitycznie). W tym przypadku $\alpha_0 = 0$; w momencie oderwania ciała od kuli mamy

$$g \cos \alpha - \frac{2e_k}{R} = 0.$$

Ponieważ nie ma tarcia, z zasady zachowania energii wynika, że

$$e_k = gR(1 - \cos \alpha).$$

Czyli otrzymujemy równanie

$$\cos \alpha - 2 \cdot (1 - \cos \alpha) = 0.$$

Stąd

$$\cos \alpha = \frac{2}{3},$$

a zatem kąt odpowiadający oderwaniu wynosi

$$\alpha = \arccos \frac{2}{3} = 0,841 \text{ rad} = 48,2^\circ. \quad (55)$$

Stąd, korzystając ze wzorów (50)–(54), otrzymujemy, że w szczególnym przypadku $\mu = 0$ szukana odległość wynosi

$$d = 1,462 \text{ m}. \quad (56)$$

2. Implementacja metody numerycznej

Metodę numeryczną opisaną równaniami iteracyjnymi (44)–(46), przy danych początkowych (47) i (48) oraz warunku (49), łatwo jest przekształcić w program komputerowy. W tym samym programie, po zakończeniu iteracji, jest wyznaczana końcowa odległość d . Wyniki dla danego współczynnika tarcia są zapisywane, a następnie obliczenia są powtarzane dla innej jego wartości.

Odpowiada to następującemu pseudokodowi

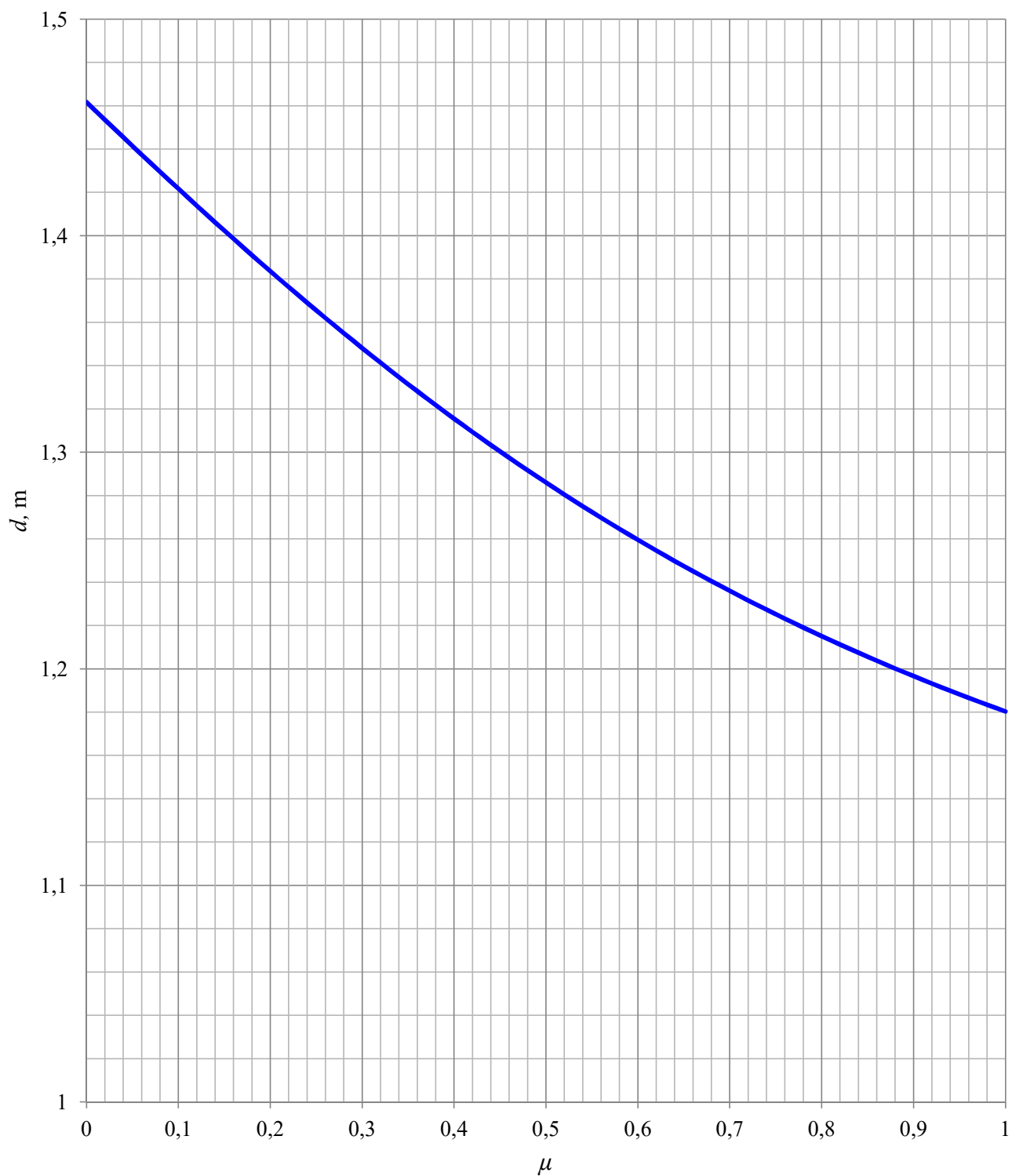
```

g = 9.81
R = 1
dalfa = 0.001
powtarzaj od mu = 0 do mu = 1 co 0.01 { // główna pętla
  alfa0 = arctan(mu)
  alfa = alfa0
  ek = 0
  powtarzaj aż n < 0 { // ruch po kuli
    n = g*cos(alfa + dalfa/2) - 2*ek/R
    ek = ek + (g*sin(alfa + dalfa/2) - mu*n)*R*dalfa
    alfa = alfa + dalfa
  } // koniec pętli odpowiadającej ruchowi po kuli
  alfa = alfa - dalfa/2 // ostatnie obliczenie było dla takiej wartości alfa
  vk = sqrt(2*ek)
  vpy = vk*sin(alfa)
  vpx = vk*cos(alfa)
  h = R*(1 + cos(alfa))
  ts = (-vpy + sqrt(vpy^2 + 2*g*h))/g
  d = R*sin(alfa) + vpx*ts
  zapisz mu, d, alfa0, alfa
} // koniec głównej pętli

```

Zauważmy, że powyżej prędkość pionowa jest zdefiniowana z przeciwnym znakiem, niż we wzorze (50).

Kod w języku C++ odpowiadający powyższemu pseudokodowi znajduje się w pliku dostępnym na stronie KGOF.

Wykres 1: Zależność odległości d od współczynnika tarcia μ 

3. Oszacowanie niepewności wyniku i sprawdzenie poprawności algorytmu

Zauważmy, że ze względu na konstrukcję algorytmu, niepewność wyznaczenia kąta oderwania można oszacować na $\Delta\alpha$ (bo co $\Delta\alpha$ sprawdzamy, czy ciało oderwało się od kuli). Niepewność kąta oderwania równa $\Delta\alpha$ oznacza niepewność drogi przebytej przez ciało na kuli równą $R\Delta\alpha$; to oznacza, że wstępnie również niepewność wyznaczenia szukanej odległości d można oszacować na $R\Delta\alpha$.

Do powyższej niepewności należy dodać niepewność związaną z tym, że krok wyznaczenia energii i siły nacisku jest skończony. To, że algorytm jest poprawny w granicach niepewności $R\Delta\alpha$ sprawdzono wykonując obliczenia dla $\Delta\alpha = 0,001$, a następnie powtarzając je dla $\Delta\alpha = 0,0001$. Na podstawie otrzymanych danych wykreślono krzywe na tym samym wykresie i sprawdzono, że wizualnie są one identyczne. Sprawdzono, że w obu przypadkach otrzymane wartości kąta oderwania oraz odległości d są zgodne, w ramach niepewności odpowiadającej $\Delta\alpha = 0,001$, ze sobą dla $\mu = 0, 0,5$, oraz $\mu = 1$. Dodatkowo sprawdzono, że wyniki dla $\mu = 0$ są zgodne ze ścisłymi wynikami (55) oraz (56).

4. Wyniki

Wyniki otrzymane dla $\Delta\alpha = 0,0001$ wczytano do arkusza kalkulacyjnego na ich podstawie stworzono wykres – patrz Wykres 1 na osobnej stronie.

Szczególne wartości odległości d są następujące:

dla $\mu = 0$: $d = 1,462$ m;

dla $\mu = 1$: $d = 1,180$ m.

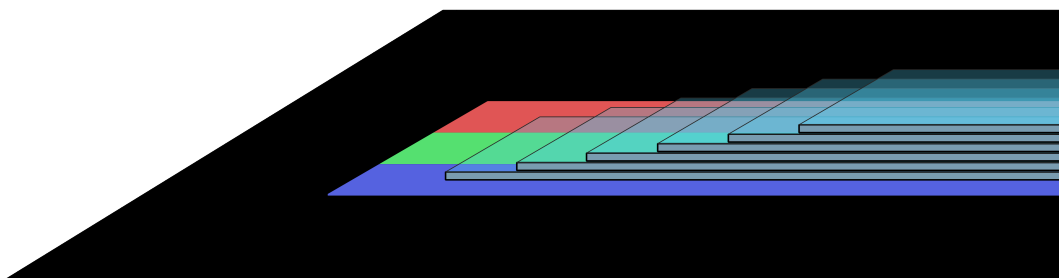
Punktacja zadania T4.

Wzór na siłę nacisku ciała na kulę (wzór (39) lub równoważny) oraz wzór na siłę działającą na ciało wzdłuż powierzchni kuli (wzór (40) lub równoważny) 1 pkt.
 Pozostałe wzory pozwalające na wyznaczenie punktu oderwania ciała od kuli oraz jego prędkości (np. wzory (41)–(43) lub równoważne) oraz jawne podanie warunku oderwania się ciała 2 pkt.
 Algorytm pozwalający wyznaczyć kąt oderwania klocka (np. równania (44)–(49)) .. 1 pkt.
 Wzory lub algorytm (w przypadku podejścia numerycznego do rzutu swobodnego) pozwalające na wyznaczenie odległości d przy założeniu, że prędkość i położenie początkowe jest znane (np. wzory (50)–(54) lub równoważne) 1 pkt.
 Opis implementacji algorytmu numerycznego (wystarczy ogólna informacja) 1 pkt.
 Opis sposobu sprawdzenia poprawności rezultatów (np. powtórzenie wyznaczania d ze zmniejszonym krokiem $\Delta\alpha$ i sprawdzenie zgodności wyników dla szczególnych wartości μ) 1 pkt.
 Wykres zgodny z wykresem podanym w rozwiązaniu 2 pkt.
 Wartości liczbowe d dla $\mu = 0$ oraz $\mu = 1$, zgodne z podanymi w rozwiązaniu 1 pkt.

Rozwiązanie zadania D1

Część teoretyczna

Pomysł na rozwiązanie zadania oparty jest o obserwację ekranu o liniowej polaryzacji emitowanego światła przez okulary polaryzacyjne o osi polaryzacji ustawionej prostopadle. W takiej sytuacji okulary polaryzacyjne pochłaniają całe światło emitowane przez ekran. Obraz wyświetlony na ekranie złożony jest z prostokątnych obszarów wypełnionych trzema czystymi barwami: czerwoną, zieloną oraz niebieską. Pomiędzy ekranem a okularami polaryzacyjnymi, umieszczono paski taśmy klejącej sklejone w taki sposób, aby istniały obszary w których łączna liczba warstw taśmy osiąga kolejne liczby naturalne (Rysunek 2). Paski umieszczono w taki sposób, aby zarówno oś polaryzacji ekranu jak oś polaryzacji okularów były ustawione pod kątem około 45° do brzegów taśmy klejącej.



Rysunek 2: Paski taśmy klejącej przyklejone w taki sposób, aby możliwe było obserwowanie ekranu przez różne liczby jej warstw.

Aby przeanalizować wpływ dwójłomnego ośrodka na polaryzację przechodzącego przez niego światła należy rozłożyć światło na składową o polaryzacji równoległej i prostopadłej do osi materiału dwójłomnego. Różnica współczynników załamania światła dla obu kierunków polaryzacji powoduje powstanie różnicy faz między składowymi światła o różnych polaryzacjach.

Na rysunku danym we wskazówce do zadania składowa światła oznaczona kolorem niebieskim podczas biegu w ośrodku dwójłomnym została opóźniona o połowę długości fali, co po ponownym złożeniu obu składowych skutkuje zmianą kierunku polaryzacji liniowej światła. W rozważanym układzie eksperymentalnym taka zmiana polaryzacji światła spowodowałaby, że światło przechodzące nie będzie wygaszone przez okulary polaryzacyjne. Można zauważyć, że przy względnym opóźnieniu obu składowych polaryzacji liniowej o pełną długość fali, polaryzacja światła nie ulega zmianie, zatem w przedstawionym układzie eksperymentalnym światło przechodzące jest wygaszane.

Pomysł na rozwiązanie zadania polega na pomiarze najmniejszej liczby warstw taśmy klejącej, która powoduje ponowne wygaszenie światła przechodzącego przez okulary polaryzacyjne, a zatem liczby warstw taśmy klejącej powodującej względne opóźnienie obu polaryzacji światła o jedną długość fali.

Długość fali światła biegnącego w materiale o współczynniku załamania n :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad (57)$$

gdzie λ_0 to jego długość fali w próżni. W ośrodku o grubości d mieści się zatem wielokrotność

$$N = \frac{d}{\lambda} = \frac{nd}{\lambda_0} \quad (58)$$

długości fali.

W rozważanym układzie pomiarowym pierwsze pełne ponowne wygaszenie przechodzącego światła nastąpi, gdy różnica wielokrotności długości fali dla różnych polaryzacji światła biegnącego w ośrodku dwójłomnym o współczynnikach załamania n_1 , n_2 będzie równa jeden.

$$1 = N_1 - N_2 = \frac{n_1 d}{\lambda_0} - \frac{n_2 d}{\lambda_0} = \frac{(n_1 - n_2)d}{\lambda_0}, \quad (59)$$

zatem różnica współczynników załamania materiału dwójłomnego wynosi:

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{\lambda_0}{d}. \quad (60)$$

Grubość ośrodka dwójłomnego można wyznaczyć jako wielokrotność k grubości d_0 pojedynczych warstw folii dwójłomnej:

$$\Delta n = \frac{\lambda_0}{k d_0}. \quad (61)$$

Aby wyznaczyć grubość pojedynczej warstwy taśmy klejącej można zmierzyć powierzchnię boczną rolki i podzielić ją przez długość taśmy w rolce. Powierzchnię boczną rolki taśmy klejącej można wyrazić przy pomocy zewnętrznej i wewnętrznej średnicy:

$$S = \frac{\pi}{4} d_1^2 - \frac{\pi}{4} d_2^2. \quad (62)$$

Uwzględniając wskazówkę, że klej stanowi połowę objętości taśmy klejącej, można obliczyć grubość pojedynczej warstwy folii:

$$d_0 = \frac{1}{2} \frac{S}{L} = \frac{\frac{\pi}{4} d_1^2 - \frac{\pi}{4} d_2^2}{2L} = \frac{\pi}{8L} (d_1^2 - d_2^2). \quad (63)$$

Część doświadczalna

Linijką zmierzono średnicę zewnętrzną rolki taśmy $d_1 = (54,0 \pm 0,5)$ mm oraz średnicę wewnętrzną $d_2 = (35,0 \pm 0,5)$ mm. Zgodnie z informacją na opakowaniu łączna długość taśmy w rolce wynosi $L = 30$ m. Przyjęto, że wartość ta jest znana dokładnie. Zgodnie z równaniem (63) obliczono grubość folii taśmy klejącej:

$$d_0 = (22,1 \pm 1,2) \mu\text{m}. \quad (64)$$

Niepewność pomiaru oszacowano metodą „najmniej korzystnego przypadku” jako połowę różnicy wyników wyrażenia 63 obliczonych dla skrajnych wartości d_1 oraz d_2 odpowiednio pomniejszanych lub powiększanych o wartości ich niepewności.

Podczas eksperymentu wykorzystano wyświetlacz smartfonu. Przy pomocy okularów z filtrem polaryzacyjnym stwierdzono, że światło emitowane przez smartfon jest spolaryzowane liniowo pod kątem około 45° do krawędzi ekranu. Następnie, przyklejono do ekranu telefonu czternaście warstw taśmy klejącej w sposób przedstawiony na rysunku 2. Taśmę przyklejono równoległe do krawędzi ekranu, a zatem pod kątem około 45° do osi polaryzacji światła. Na ekranie smartfonu – pod taśmą klejącą – wyświetlono trzy paski w kolorach czerwonym, zielonym oraz niebieskim. Okulary polaryzacyjne ustawiono prostopadle do osi polaryzacji światła emitowanego przez ekran smartfonu. Rysunek 3 przedstawia obraz widoczny przez okulary polaryzacyjne.

Na podstawie eksperymentu odczytano, że minima intensywności światła występują dla światła czerwonego przy liczbach warstw taśmy równych 3, 5, 8, 10 oraz 13, dla światła zielonego przy



Rysunek 3: Zdjęcie kolorowych obszarów na ekranie widocznych przez różne liczby warstw taśmy klejącej. Strzałkami zaznaczono odczytane minima intensywności przechodzącego światła, w których opóźnienie pomiędzy składowymi światła o różnych polaryzacjach jest wielokrotnością długości fali.

liczbach warstw 4, 7 oraz 12, a dla światła niebieskiego przy liczbie warstw równej 6. Aby zwiększyć precyzję pomiaru, liczbę warstw taśmy potrzebną do uzyskania opóźnienia równego jednej długości fali określono na podstawie ostatnich zaobserwowanych minimów:

$$k_{\text{czerw}} = \frac{13 \pm 0,5}{5} = 2,6 \pm 0,1, \quad (65)$$

$$k_{\text{ziel}} = \frac{12 \pm 0,5}{3} = 4,0 \pm 0,2, \quad (66)$$

$$k_{\text{nieb}} = \frac{6,0 \pm 0,5}{1} = 6,0 \pm 0,5. \quad (67)$$

W powyższych wyrażeniach liczba w mianowniku jest kolejnym numerem minimum, które bierzemy pod uwagę w obliczeniach. Następnie, przy użyciu równania 61 obliczono różnicę współczynników załamania światła przechodzącego przez folię taśmy klejącej dla polaryzacji światła wzdłuż oraz w poprzek taśmy:

$$\Delta n_{\text{czerw}} = \frac{\lambda_0}{k_{\text{czerw}} d_0} = 0,0111 \pm 0,0011, \quad (68)$$

$$\Delta n_{\text{ziel}} = \frac{\lambda_0}{k_{\text{ziel}} d_0} = 0,0060 \pm 0,0007, \quad (69)$$

$$\Delta n_{\text{nieb}} = \frac{\lambda_0}{k_{\text{nieb}} d_0} = 0,0035 \pm 0,0005, \quad (70)$$

Niepewność wyniku końcowego oszacowano jako połowę różnicy wyniku otrzymanego dla wielkości k oraz d_0 powiększonych oraz pomniejszonych o wartości ich niepewności.

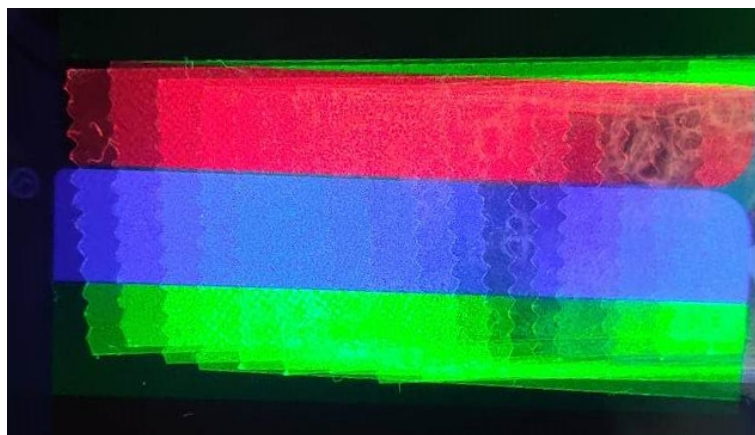
Komentarz

Wyniki eksperymentu mogą się różnić znacząco dla taśm różnych producentów. Przedstawione powyżej rozwiązanie wykonano przy użyciu taśmy klejącej. Dla droższej taśmy klejącej renomowanej marki zaobserwowano znacznie niższą dwójłomność:

$$\Delta n'_{\text{czerw}} = 0,0015 \pm 0,0001, \quad (71)$$

$$\Delta n'_{\text{ziel}} = 0,0016 \pm 0,0001, \quad (72)$$

$$\Delta n'_{\text{nieb}} = 0,0015 \pm 0,0001. \quad (73)$$



Rysunek 4: Zdjęcie wykonane podczas eksperymentu powtórzonego przy użyciu taśmy klejącej innego producenta.

Obliczeń niepewności można też dokonać korzystając z zaleceń w: *Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach*. Wówczas niepewności całkowite Δn — ozn. $u(\Delta n)$, wynoszą:

$$u(\Delta n_{\text{czerw}}) = 0,0004; \quad u(\Delta n_{\text{ziel}}) = 0,0002; \quad u(\Delta n_{\text{nieb}}) = 0,0001. \quad (74)$$

Dla funkcji pomiaru (63), całkowita niepewność pomiaru grubości pojedynczej warstwy folii $u(d_0) = 0,5 \mu\text{m}$.

Potrzebne wzory do obliczeń zostały przytoczone w: [Komentarz do obliczeń niepewności pomiaru](#).

Jak zawsze, przy ocenie rozwiązań będą uznawane wszystkie rozsądne metody obliczania niepewności pomiarowych.

Punktacja zadania D1.

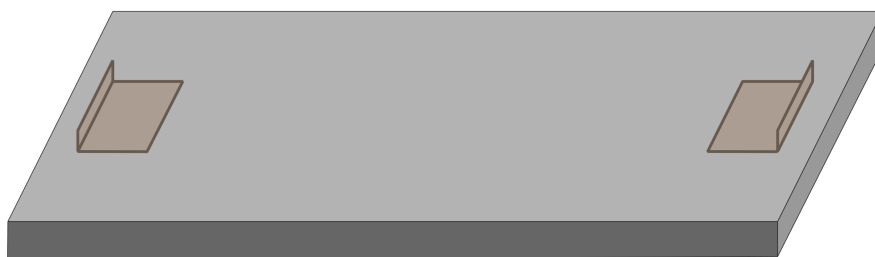
- Pomysł na wyznaczenie różnicy współczynników załamania (wzór (61) lub równoważny) 5 pkt.
 Pomysł na wyznaczenie grubości taśmy klejącej (wzór (63) lub równoważny) 2 pkt.
 Opis układu pomiarowego oraz procedury pomiaru 3 pkt.
 Wyznaczenie grubości folii taśmy klejącej 2 pkt.
 Wyznaczenie liczby warstw folii dla których następuje opóźnienie składowych o różnych polaryzacjach o jedną długość fali 3 pkt.

Wyznaczenie różnicy współczynników załamania dla różnych polaryzacji światła, dla wszystkich trzech kolorów 3 pkt.
 Dyskusja i oszacowanie niepewności otrzymanych wyników 2 pkt.

Rozwiązanie zadania D2

Część teoretyczna

Pomysł na rozwiązanie zadania polega na przymocowaniu fragmentów tektury do telefonu, w taki sposób, aby cały ciężar telefonu spoczywał na tekturze oraz aby wszystkie punkty podparcia znajdowały się w podobnej odległości od środka telefonu. Proponowany sposób przymocowania tekturowych nóżek (podpórek) przedstawiony jest na Rysunku 5.



Rysunek 5: Smartfon z przyklejonymi tekturowymi nóżkami.

Współczynnik tarcia tektury o podłoże można otrzymać przez pchnięcie telefonu po blacie w kierunku zgodnym z jedną z osi akcelerometru (wzdłuż jednej z krawędzi smartfonu). Znając przyspieszenie a smartfonu podczas takiego ruchu jednostajnie opóźnionego można obliczyć współczynnik tarcia tektury o blat:

$$\mu = -\frac{a}{g}, \quad (75)$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie.

Moment bezwładności smartfonu można wyznaczyć badając jednostajnie opóźniony ruch obrotowy wokół osi własnej smartfonu przy udziale tarcia tekturowych nóżek o blat. Wartość momentu hamującego siły tarcia podczas takiego ruchu wynosi

$$M = mLg\mu, \quad (76)$$

gdzie L to odległość punktu przyłożenia siły od środka masy smartfonu, a m to jego masa. Na potrzeby eksperymentu przyjęto upraszczające założenie, że środek masy smartfonu znajduje się w jego środku geometrycznym. Moment bezwładności można obliczyć jako iloraz wartości momentu siły hamującej i przyspieszenia kątownego zarejestrowanego przez smartfon:

$$I = \frac{M}{|\varepsilon|} = \frac{mLg\mu}{|\varepsilon|}. \quad (77)$$

Przyspieszenie kątowne smartfonu można wyznaczyć poprzez dopasowanie prostej do zależności prędkości kątownej od czasu i odczytanie współczynnika kierunkowego ε :

$$\omega = \varepsilon \cdot t + \omega_0. \quad (78)$$

Część doświadczalna

Tekturowe nóżki przyklejono do smartfonu w sposób przedstawiony na rysunku 5, symetrycznie do siebie względem środka smartfonu, przyjmując, że pokrywa się on ze środkiem jego masy. Podpórki nie są łukami, są równoległe do krawędzi smartfonu, więc występuje zróżnicowanie odległości różnych punktów podparcia od środka smartfonu, stanowi to istotne źródło niepewności. Odległość L zostanie odniesiona do połowy odległości od środka smartfonu a końcem podpórki oraz środkiem podpórki. Papierem milimetrowym odczytano odległość pomiędzy środkami nóżek i otrzymano $l_1 = 151$ mm. Następnie zmierzono odległość pomiędzy przeciwległymi brzegami nóżek (wzdłuż przekątnej) otrzymując $l_2 = 155$ mm. Ze względu na grubość i elastyczność tektury oszacowano niepewności pomiaru l_1, l_2 na 2 mm. Przyjęto, że efektywna odległość l pomiędzy skrajnymi punktami podparcia smartfonu jest połową średniej z wartości l_1 oraz l_2 , a jej niepewność jest określona przez połowę różnicy tych wartości i powiększona przez wartość ich niepewności:

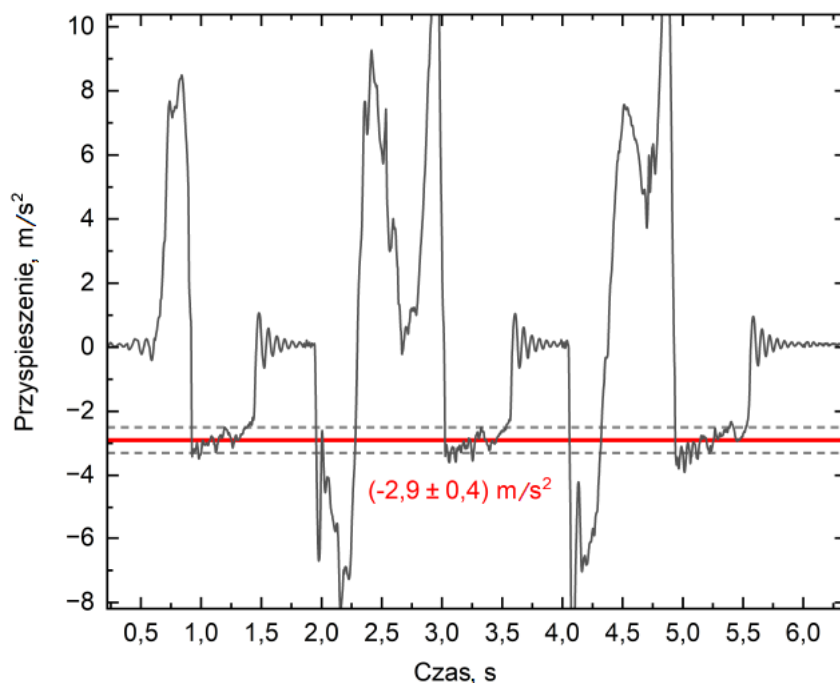
$$l = (153 \pm 4) \text{ mm.} \quad (79)$$

Efektywna odległość pomiędzy środkiem masy smartfonu a punktami podparcia wynosi zatem:

$$L = (76,5 \pm 2,0) \text{ mm.} \quad (80)$$

Masa telefonu według specyfikacji technicznej wynosi $m = 0,180$ kg. Przyjęto, że wartość ta znana jest dokładnie.

Aby wyznaczyć współczynnik tarcia nóżek o blat pchnięto smartfon trzykrotnie po blacie wzdłuż jego dłuższego boku. Na Rysunku 6 przedstawiono zmierzoną zależność przyspieszenia wzdłuż odpowiedniej osi od czasu. Zmierzona wartość przyspieszenia zmieniała się w trakcie ruchu te-



Rysunek 6: Przyspieszenie zarejestrowane wzdłuż osi telefonu podczas jego trzykrotnego pchnięcia po blacie.

lefonu. Do danych eksperymentalnych dopasowano graficznie wartość przyspieszenia najlepiej

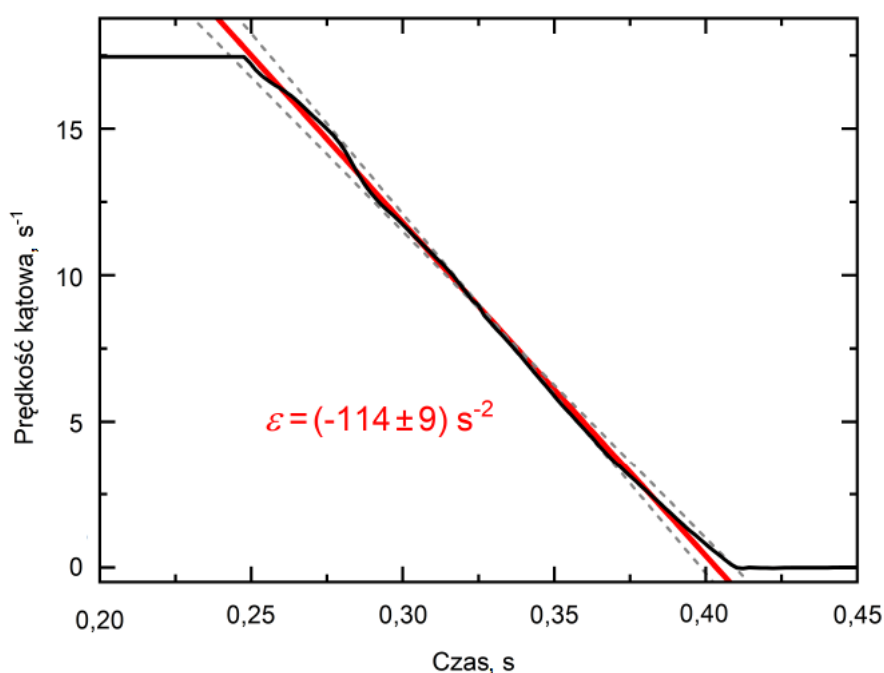
opisującą dane pomiarowe oraz skrajne wartości odpowiadające pomiarowi. Otrzymano wartość przyspieszenia:

$$a = (-2,9 \pm 0,4) \text{ m s}^{-2}. \quad (81)$$

Współczynnik tarcia tektury o blat wynosi zatem zgodnie z równaniem (75):

$$\mu = -\frac{a}{g} = 0,295 \pm 0,040. \quad (82)$$

Następnie, wykonano podobny eksperyment rozkręcając telefon wokół własnej osi i mierząc prędkość kątową telefonu. Wynik pomiaru przedstawiony jest na rysunku 7. Przy dużej prędko-



Rysunek 7: Prędkość obrotowa smartfonu obracającego się wokół własnej osi na blacie.

ści obrotowej żyroskop wskazywał stałą wartość odpowiadającą maksymalnej wartości w zakresie pomiarowym. Z tego powodu do analizy wybrano zakres czasu, w którym prędkość kątowa była mniejsza od tej wartości. Do wyniku pomiaru prędkości kątowej w zależności od czasu dopasowano prostą zgodnie z równaniem (78) oraz skrajne proste odpowiadające punktom pomiarowym i otrzymano wartość prędkości kątowej:

$$\varepsilon = (-114 \pm 9) \text{ s}^{-2}. \quad (83)$$

Niepewność wielkości ε oszacowano jako połowę różnicy współczynników kierunkowych skrajnych dopasowanych prostych. Na podstawie otrzymanej wartości obliczono zgodnie z równaniem (77) moment bezwładności smartfonu:

$$I = \frac{M}{|\varepsilon|} = \frac{mLg\mu}{|\varepsilon|} = (3,5 \pm 0,8) \text{ kg cm}^2. \quad (84)$$

Niepewność pomiaru oszacowano metodą „najmniej korzystnego przypadku” jako połowę różnicy wyników wyrażenia (84) obliczonych dla skrajnych wartości L , μ , ε odpowiednio pomniejszanych lub powiększanych o wartości ich niepewności.

Obliczeń niepewności można też dokonać korzystając z zaleceń w: *Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach (Rekomendacja PTF)*. Wówczas niepewność całkowita I – ozn. $u(I)$, wynosi: $u(I) = 0,32 \text{ kg cm}^2$. Z obliczeń przytaczamy też udziały niepewności (wkłady do niepewności całkowitej) od parametrów w funkcji pomiaru (84) (po zaokrągleniu do 2 cyfr znaczących):

$$u_L(I) = 0,02 \text{ kg cm}^2; \quad u_m u(I) = 0,28 \text{ kg cm}^2; \quad u_\varepsilon(I) = 0,16 \text{ kg cm}^2; \quad (85)$$

gdzie indeks przy u oznacza do którego parametru niepewność się odnosi.

Z przytoczonych wartości – największy wkład do niepewności całkowitej współczynnika ma niepewność pochodząca od współczynnika tarcia μ , de facto, od niepewności wyznaczenia przyspieszenia a .

Potrzebne wzory do obliczeń zostały przytoczone w: [Komentarz do obliczeń niepewności pomiaru](#).

Jak zawsze, przy ocenie rozwiązań będą uznawane wszystkie rozsądne metody obliczania niepewności pomiarowych.

Punktacja zadania D2.

Pomysł na wyznaczenie współczynnika tarcia tektury o blat (wzór (75) lub równoważny) 2 pkt.

Pomysł na wyznaczenie momentu bezwładności smartfonu (wzór (77) lub równoważny) 5 pkt.

Opis układu pomiarowego oraz procedury pomiaru 3 pkt.

Wyznaczenie współczynnika tarcia tektury o blat 3 pkt.

Wyznaczenie momentu bezwładności smartfonu 4 pkt.

Ocena niepewności otrzymanych wyników 3 pkt.

Rozwiązanie zadania D3

Część teoretyczna

Rozważmy sytuację, w której w woreczku foliowym znajduje się n monet, a nad nimi włożony pionowo pasek papieru zgodnie z Rysunkiem 8. Woreczek z monetami oraz paskiem papieru zanurzony jest częściowo w wodzie tak, aby monety i część paska znajdowały się pod powierzchnią wody. Woda wywiera wtedy ciśnienie hydrostatyczne na woreczek foliowy, który z kolei ścisną pasek papieru.

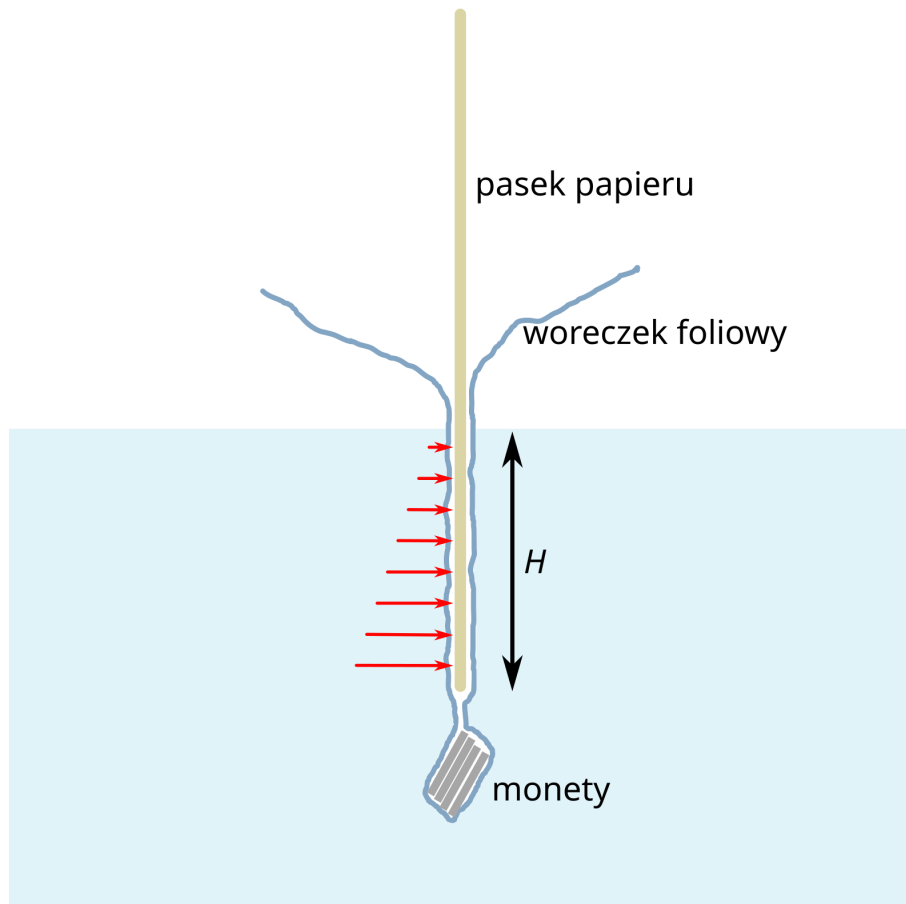
Fragment paska papieru na głębokości h pod powierzchnią cieczy ścisany jest z obu stron ciśnieniem hydrostatycznym:

$$p = \rho_w g h \quad (86)$$

Jeśli pasek papieru jest zanurzony na głębokość H , wtedy działające na niego ciśnienie hydrostatyczne od cieczy zmienia się liniowo od zera przy powierzchni cieczy do wartości:

$$p_{\max} = \rho_w g H \quad (87)$$

na jego końcu. Ponieważ ciśnienie cieczy zmienia się liniowo na całej zanurzonej długości, całkowitą siłę ciśnienia hydrostatycznego działającego na jedną zanurzoną stronę paska papieru



Rysunek 8: Schemat układu pomiarowego.

można opisać przez iloczyn jej powierzchni i średniego ciśnienia hydrostatycznego. Powierzchnia zanurzonej części paska o szerokości w wyniesie

$$S = wH, \quad (88)$$

podczas gdy średnie ciśnienie hydrostatyczne wyniesie

$$p_{\text{sr}} = \frac{0 + p_{\text{max}}}{2} = \frac{p_{\text{max}}}{2} = \frac{\rho_w g H}{2}. \quad (89)$$

Siła ciśnienia hydrostatycznego działającego na jedną stronę paska wynosi zatem

$$F = p_{\text{sr}} S = \frac{\rho_w g w H^2}{2}. \quad (90)$$

Największa możliwa siła tarcia statycznego działającego pionowo na pasek papieru będzie pochodziła od siły nacisku F działającej na obie strony paska papierowego:

$$T = 2F\mu = \rho_w g w H^2 \mu \quad (91)$$

Aby trzymając za pasek papieru można było utrzymać woreczek z monetami zawieszony w wodzie, ciężar monet musi być zrównoważony siłą wyporu oraz siłą tarcia o pasek papieru. W sytuacji, w której siła tarcia jest równa maksymalnej możliwej siły tarcia oraz gdy równoważą ona ciężar monet pomniejszony o działającą na nie siłę wyporu zachodzi:

$$T = nmg - nmg \frac{\rho_w}{\rho_m} \quad (92)$$

Równania (91) i (92) można przekształcić do postaci równania prostej:

$$\rho_w g w H^2 \mu = n m g - n m g \frac{\rho_w}{\rho_m}, \quad (93)$$

$$H^2 = m \frac{\rho_m - \rho_w}{\rho_m \rho_w w \mu} n = A \cdot n \quad (94)$$

Współczynnik tarcia μ można obliczyć na podstawie otrzymanej przy pomocy dopasowania prostej wartości współczynnika kierunkowego A :

$$A = m \frac{\rho_m - \rho_w}{\rho_m \rho_w w \mu} \quad (95)$$

$$\mu = m \frac{\rho_m - \rho_w}{\rho_m \rho_w w A} \quad (96)$$

Część doświadczalna

Woreczek zanurzano częściowo w wodzie tak, aby nie dostała się do środka, ale ścisnęła go usuwając z niego całe powietrze. Monety i część paska powinny znajdować się poniżej poziomu wody. Jeśli wewnątrz woreczka uległo zawilgoceniu, woreczek oraz pasek papieru wymieniano na suchy. Woreczek z monetami powoli podnoszono trzymając za pasek papieru o szerokości $w = (20 \pm 1)$ mm aż do momentu pokonania tarcia statycznego pomiędzy paskiem a woreczkiem. Odczytywano graniczną długość H zanurzonej części paska w momencie wystąpienia poślizgu, uprzednio umieściwszy w woreczku od zera do pięciu monet:

n	0	1	2	3	4	5
H (cm)	1,0	3,0	4,0	4,5	5,0	6,0

Tabela 1: Wyniki pomiarów

Ze względu na trudność precyzyjnego odczytu przyjęto niepewność pomiaru wysokości H oszacowano na 0,5 cm. Do danych eksperymentalnych dopasowano graficznie wartość prostą najlepiej opisującą dane pomiarowe oraz skrajne proste odpowiadające punktom pomiarowym. Otrzymało wartość współczynnika kierunkowego A równą: Otrzymało wartość przyspieszenia:

$$A = (6,8 \pm 0,8) \text{ cm}^2. \quad (97)$$

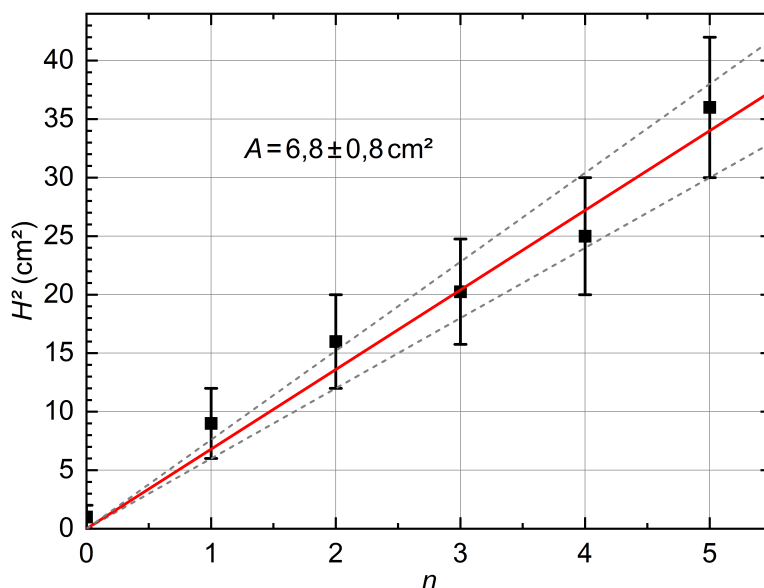
Następnie na podstawie wzoru (96) obliczono współczynnik tarcia folii o pasek papieru:

$$\mu = 0,33 \pm 0,05 \quad (98)$$

Niepewność pomiaru oszacowano metodą „najmniej korzystnego przypadku” jako połowę różnicy wyników wyrażenia 96 obliczonych dla skrajnych wartości A oraz w odpowiednio pomniejszanych lub powiększonych o wartości ich niepewności.

Obliczeń niepewności można też dokonać korzystając z zaleceń w: *Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach (Rekomendacja PTF)*. Wówczas niepewność całkowita μ – ozn. $u(\mu)$, wynosi: $u(\mu) = 0,24$. Z obliczeń, bez cząstkowych zaokrągleń, przytaczamy też udziały niepewności (wkłady do niepewności całkowitej) od parametrów w funkcji pomiaru (96):

$$u_w(\mu) = 0,0094; \quad u_A(\mu) = 0,0222; \quad (99)$$



Rysunek 9: Wyniki pomiarów wraz z dopasowaniem prostej.

gdzie indeks przy u oznacza do którego parametru niepewność się odnosi. Z przytoczonych wartości — największy wkład do niepewności całkowitej współczynnika μ , tarcia folii o pasek papieru, wnosi niepewność wyznaczenia współczynnika A .

Potrzebne wzory do obliczeń zostały przytoczone w: [Komentarz do obliczeń niepewności pomiaru](#).

Jak zawsze, przy ocenie rozwiązań będą uznawane wszystkie rozsądne metody obliczania niepewności pomiarowych.

Punktacja zadania D3.

Wyznaczenie siły ciśnienia hydrostatycznego działającej na pasek papieru (wzór (90) lub równoważny)	5 pkt.
Pomysł na wyznaczenie współczynnika tarcia papieru o folię (wzór (96) lub równoważny)	5 pkt.
Opis układu pomiarowego oraz procedury pomiaru	2 pkt.
Wykonanie pomiarów umożliwiających wyznaczenie współczynnika tarcia papieru o folię	2 pkt.
Przeprowadzenie pomiarów dla co najmniej czterech różnych liczb monet	2 pkt.
Wyznaczenie współczynnika tarcia papieru o folię	2 pkt.
Ocena niepewności otrzymanych wyników	2 pkt.